理工系の　基礎線形代数学

硲野敏博
加藤芳文
共　著

学術図書出版社

理工系の 基礎線形代数学

裕 野 敏 博

加 藤 芳 文

共 著

学術図書出版社

まえがき

本書は理工系学部において線形代数学の基本的事項を学ぶための教科書として書かれたものである．

線形代数学は微分積分学とならんで大学初年度の数学の2本の大きな柱である．それは線形代数の理論が自然科学や工学はもちろんのこと，情報科学や社会科学などの分野でも広く応用されているからである．しかし，応用範囲が広いということは，一面では理論が抽象的で一般化されているということにもつながる．線形代数の考え方やその計算方法を早く修得する必要がある学生の中でこれを負担として感じる者も多い．

そこで，本書では定理の証明や理論の説明においては厳密性にも注意しつつ，具体的で易しい事例を多くとりいれることにより，その全体像をつかみ易くするよう心がけた．また，定理や例題にはていねいな証明や解答をつけた．

線形代数の教科書はこれまでに多数出版されている．本書の記述の内容や順番については，標準的なものに従った．第1章の複素数についての記述は，その内容の重要性にもかかわらず時間的制約のため，まとめて学習する機会が少ない現状に考慮したからである．第7章のジョルダンの標準形は，同値な行列の中からもっとも簡単な行列をさがすという行列の理論における基本的な問題に対する答えである．これは定数係数線形常微分方程式の解法など応用が広いが，最近は難しいということで教科書から省かれることが多い．そこで，最初に学ぶときは飛ばして読めばよいが，将来必要に応じて振り返ってほしい．

本書の出版にあたって多くの線形代数の教科書を参考にさせて頂きました．また，木村郁奈さんには原稿を読んでもらって貴重な意見を頂きました．あわせて感謝致します．さらに，お世話になりました学術図書出版社の発田孝夫氏をはじめ編集部の方々にお礼申し上げます．

1994年1月

著　者

もくじ

6. 内積空間

7. 行列の標準化

1

行　列

1.1 複　素　数

◈ 複素数 ◈

この本で取り扱う数の体系は実数と複素数とする．実数全体のつくる集合を記号で $\boldsymbol{R}$ と書き，複素数全体の集合を $\boldsymbol{C}$ と書く．また，$\boldsymbol{Z}$ と $\boldsymbol{N}$ でそれぞれ整数全体，自然数全体の集合を表す．ある元 x が集合 A に属するとき $x \in A$ または $A \ni x$ と書き，属さないとき $x \notin A$ または $A \not\ni x$ と書く．

複素数は，2次方程式の解法で学んだように，**虚数単位**と呼ばれる $i^2 = -1$ を満たす新しい数 i を導入したとき

$$a+bi \qquad (a, b \in \boldsymbol{R})$$

の形に表される数のことである．実数 a は自然に複素数 $a+0i$ と同一視できるので，$\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{C}$ の部分集合とみなせる．複素数 $z = a+bi$ に対して，a を z の**実部**といい $\mathrm{Re}\, z$ で表し，b を z の**虚部**といい $\mathrm{Im}\, z$ で表す．

$i^2 = -1$ に注意すると，複素数 $\boldsymbol{C}$ には次のような四則演算が入る．

（1）　$(a+bi)\pm(c+di) = (a\pm c)+(b\pm d)i$　　（複号同順）

（2）　$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

（3）　$\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$　　$(c+di \neq 0)$

実数を理解するために数直線を用いたように，複素数の場合には平面表示を用いて，図形的に理解するのがよい．すなわち，複素数 $z = a+bi$ に対して，直交座標で考えた x-y 平面上の点 $\mathrm{P}(a, b)$ を対応させる．このとき，この平面を**複素平面**または**ガウス平面**という．また，x 軸と y 軸をそれぞれ**実軸**，**虚軸**という．

$z = a + bi$ に対して，$\bar{z} = a - bi$ で定義される複素数を z の**共役複素数**という．z と $\bar{z}$ は実軸に関して対称な位置にある．

定理 1.1

複素数 z_1, z_2 に対して，次が成り立つ．

（1）$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

（2）$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

（3）$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$　$(z_2 \neq 0)$

（4）$\bar{\bar{z}}_1 = z_1$

証明　（2）を証明する．$z_1 = a_1 + b_1 i$，$z_2 = a_2 + b_2 i$ とすれば

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

したがって，$\overline{z_1 z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$ となる．一方

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

である．(1),(3),(4) も同様に証明できる．■

例 1

$$(3-2i)(1+2i) = 7+4i$$

$$\frac{2+3i}{4+2i} = \frac{(2+3i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{14+8i}{20} = \frac{7}{10} + \frac{2}{5} i$$

例 2　$z = 2 - 3i$ のとき，$\mathrm{Re}\, z = 2$，$\mathrm{Im}\, z = -3$ である．また，共役複素数は $\bar{z} = 2 + 3i$ である．

問 1　次の複素数を $a + bi$ の形に書け．

（1）$(2+3i)(1-2i)$　（2）$\dfrac{1}{1+i}$　（3）$\dfrac{3-2i}{-1+i}$

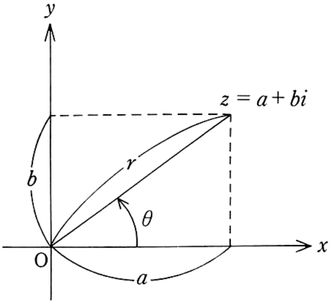
（4）$\dfrac{(1+2i)^2}{2-3i}$　（5）$\overline{(3-7i)}(2+i)^2$　（6）$\dfrac{1-i}{3+5i}$

原点Oから点 $z = a + bi$ までの距離 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ を z の**絶対値**といい，$|z|$ で表す．$z\bar{z} = a^2 + b^2$ より

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

が成り立つ．また，実軸と線分 Oz のなす角 θ を z の**偏角**といい，$\arg z$ で表す．通常は偏角 θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲にとる．しかし，原点 O のまわりの周回も含め，$\theta+2n\pi$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ も偏角とみなすときがある．0 の偏角は考えない．

平面上の点を組 (r, θ) を用いて表すことを**極座標表示**という．図より次の関係が成り立つ．



（1）　$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta$

（2）　$r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \tan\theta = \dfrac{b}{a}$

したがって

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表される．この表示を複素数 z の**極形式**という．0 でない z の共役複素数 $\bar{z}$ と逆数 z^{-1} を極形式で表すと，それぞれ

$$\begin{aligned}\bar{z} &= r(\cos\theta - i\sin\theta)\\ &= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))\\ z^{-1} &= r^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}\\ &= r^{-1}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))\end{aligned}$$

となる．とくに絶対値 $r = |z| = 1$ の複素数はすべて

$$\cos\theta + i\sin\theta$$

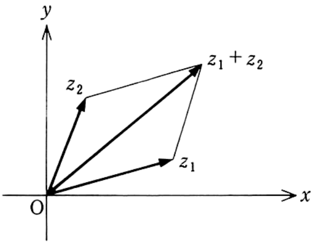
と表される．このとき $\bar{z}$ と z^{-1} は一致する．

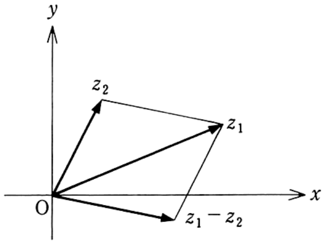
例 3

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

複素数 z にベクトル $\overrightarrow{\mathrm{O}z}$ を対応させると，複素平面での複素数の和と差は，平面ベクトルの和と差になる．





定理 1.2

複素数 z_1, z_2 の積 z_1z_2 に対して，次が成り立つ．

（1）　$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

（2）　$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

証明　z_1 と z_2 を極形式

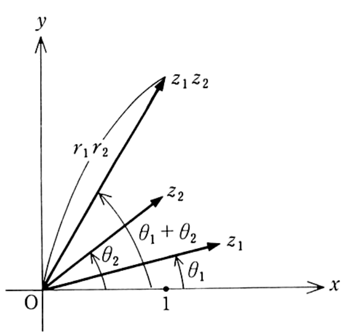
$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

で表すと，その積は 3 角関数の加法公式より

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned}$$

となる．これも極形式であるから，定理が示されたことになる．　■

この結果を複素平面上で表すと右図のようになる．実数 r をかけることは，複素平面上では，原点 O を中心とした r 倍の拡大（$1<r$）と縮小（$0<r<1$）を意味する．絶対値 1 の複素数 $\cos\theta + i\sin\theta$ をかけると角度 θ の左まわりの回転を引き起こす．



問 2　$\triangle O1z_1$ と $\triangle Oz_2(z_1z_2)$ は相似になることを示せ．

定理 1.3（ド・モアブルの公式）

整数 n に対して，次が成り立つ．

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

証明　n が正の整数のときは

$$\arg(\cos\theta + i\sin\theta)^n = n\theta$$

であり，また

$$|(\cos\theta + i\sin\theta)^n| = |\cos n\theta + i\sin n\theta| = 1$$

であるから，与式が成り立つ．n が負の整数のときは

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

の関係を用いる．$n = 0$ のときは，両辺はともに 1 である．■

例題 1.1　ド・モアブルの公式を用いて，次の 2 倍角の公式を証明せよ．

（1）　$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

（2）　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

解答　$n = 2$ のときのド・モアブルの公式より

$$\begin{aligned}\cos 2\theta + i\sin 2\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta + 2\cos\theta\,(i\sin\theta) + (i\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

この両辺の実部と虚部を比較すると，それぞれ（1）と（2）が出る．

問 3　次の複素数を複素平面上に図示せよ．

（1）　$1+3i$　　（2）　$-2+i$

（3）　$3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$　　（4）　$2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

問 4　次の複素数を極形式で表せ．

（1）　$1+i$　　（2）　$1-\sqrt{3}\,i$　　（3）　-2　　（4）　$3i$

◈ 代数学の基本定理 ◈

次の公式が示すように，指数関数 $y = e^x$ の変数 x のとる値の範囲を実数から複素数に拡張することができる．指数関数と 3 角関数は虚数単位 i を通して

互いに結びつくことがわかる．

定理 1.4（オイラーの公式）

実数 θ に対して，次が成り立つ．

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

この等式は，微分積分学で学ぶテイラー展開を用いて正当化される．ここでは証明は省略する．等式

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

とド・モアブルの公式は，この記法を用いるとそれぞれ

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \qquad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \qquad (n \in \boldsymbol{Z})$$

と表され，いずれも指数関数が満たすべき性質である．

また，一般の複素数 $z = x + iy$ に対しては

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

と定義する．

例題 1.2　複素数の範囲で 1 の n 乗根，つまり

$$z^n = 1$$

を満たす解をすべて求めよ．

解答　$z = re^{i\theta}$ とおくと，$z^n = r^n(e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$．他方，$1 = 1\cdot e^{2ik\pi}$ $(k \in \boldsymbol{Z})$ と表されるので

$$r^n = 1, \qquad n\theta = 2k\pi \qquad (k \in \boldsymbol{Z})$$

となる．ここで $r \geqq 0$ だから $r = 1$ であり，偏角を $0 \leqq \theta < 2\pi$ で考えると $\theta = 2k\pi/n\,(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ としてよい．したがって，1 の n 乗根は次の n 個の複素数である．

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

ここで $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ とおくと，1 の n 乗根は $1, \alpha^1, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}$ と表される．これらは，原点を中心とする半径 1 の円に内接する正 n 角形の頂点に位置している．

一般の n 次方程式については，次の定理が成り立つことが知られている．証明は省略する．

定理 1.5（代数学の基本定理）

複素数を係数にもつ n 次方程式

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

は必ず複素数の範囲で解をもつ．

因数定理を用いれば次の結果を得る．

定理 1.6

$f(z)$ は複素数の範囲で

$$f(z) = a_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$$

と 1 次式の積に分解される．したがって，n 次方程式は重複度をこめて，n 個の複素数の解をもつ．

問 5　次の等式が成り立つことを示せ．

（1）　$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$　　（2）　$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

問 6　1 の 5 乗根をすべて求め，複素平面上に図示せよ．

1.2　行列とその演算

◈ (m, n) 行列 ◈

mn 個の数 a_{ij} $(i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n)$ を次のように長方形に並べたもの

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を **(m, n) 行列**，**$m \times n$ 型行列**，**m 行 n 列の行列**などという．

行列の横の並びを**行**といい，上から順番に**第 1 行**，**第 2 行**，…，**第 m 行**とい

う．縦の並びは**列**といい，左から**第1列**，**第2列**，…，**第 n 列**という．第 i 行と第 j 列の交点にある数 a_{ij} を A の $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ **成分**という．簡単のために行列を (i, j) 成分で代表させて $A=(a_{ij})$ と表すこともある．

2つの行列が等しいとは，それらの型が同じであるとともに，対応する成分がすべて等しいときをいう．すべての成分が0である (m, n) 行列を**零行列**といい O と書く．とくに型を強調したいときは O_{mn} と書く．

例4　（1）　$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3i & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ は $(3, 2)$ 行列で，$(1, 2)$ 成分は -3，$(2, 1)$ 成分は $3i$ である．

（2）　$O_{23}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

とくに (n, n) 行列を $\boldsymbol{n}$ **次正方行列**，または単に $\boldsymbol{n}$ **次行列**という．そのとき $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ を**対角成分**という．また $(m, 1)$ 行列を $\boldsymbol{m}$ **項列ベクトル**，$(1, n)$ 行列を $\boldsymbol{n}$ **項行ベクトル**という．列ベクトルと行ベクトルを合わせて，単に**ベクトル**ともいう．一般に行列はアルファベットの大文字を用い $A, B, C, \cdots$ などで表し，列ベクトルや行ベクトルは太い小文字 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \cdots$ などで表す．

(m, n) 行列の各行および各列をベクトルとみなし，行列を

$$A=(\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1' \\ \boldsymbol{a}_2' \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m' \end{pmatrix}$$

と表すこともある．ここで

$$\boldsymbol{a}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad (j=1, \cdots, n)$$

$$\boldsymbol{a}_i' = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}) \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

である．これらをそれぞれ行列 A の**列ベクトル表示**，**行ベクトル表示**という．

例 5　$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{a}_1' = (-2 \quad 3 \quad -1)$, $\boldsymbol{a}_2' = (3 \quad -4 \quad 0)$,

$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．

◈ **実行列と複素行列** ◈

行列 $A = (a_{ij})$ の成分 a_{ij} がすべて実数のとき，A を**実行列**といい，複素数のときは**複素行列**という．行列やベクトルを扱うとき，実数や複素数のことを，それらと区別するために**スカラー**ともいう．$(1, 1)$ 行列はスカラーとみなすこともある．

$A = (a_{ij})$ を複素行列とする．A の各成分をその共役複素数で置き換えて得られる行列を $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ と書き，A の**共役行列**という．

例 6　$A = \begin{pmatrix} 1-2i & 3+i \\ 5i & 4 \end{pmatrix}$ のとき，$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1+2i & 3-i \\ -5i & 4 \end{pmatrix}$.

◈ **行列のスカラー倍と和** ◈

(m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ とスカラー c に対して，A の**スカラー倍** cA を

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix} = (ca_{ij})$$

で定義する．また，$-A = (-1)A$ とする．

2 つの行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ がともに同じ (m, n) 行列であるとき，行列の**和** $A+B$ が次で定義される．

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij}+b_{ij})$$

ただし，型が異なるときには，和は定義されない．次の定理の証明は容易である．

定理 1.7

A, B, C を (m, n) 行列，c, d をスカラーとするとき次が成り立つ．

I　(1)　$A+B=B+A$

(2)　$(A+B)+C=A+(B+C)$

(3)　$A+O=O+A=A$

(4)　$A-A=O$

II　(1)　$c(A+B)=cA+cB$

(2)　$(c+d)A=cA+dA$

(3)　$(cd)A=c(dA)$

(4)　$1A=A$

問 7　上の定理を確かめよ．

(i, j) 成分が 1 で，残りの他の成分がすべて 0 である (m, n) 行列を E_{ij} と書く．$E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{ij}, \cdots, E_{mn}$ を**行列単位**という．これを用いれば任意の (m, n) 行列 $A=(a_{ij})$ は

$$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$$

と表される．

例 7　$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$ のとき

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -4\end{pmatrix}$$

$$2A-3B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 9 & -15\\ 3 & 12 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -13 & 21\\ 1 & -10 & 7\end{pmatrix}$$

◈ **行列の積** ◈

(l, m) 行列 $A=(a_{ij})$ と (m, n) 行列 $B=(b_{ij})$ に対して，行列 A と行列 B の**積** AB が次で定義される．

（1）　AB は (l, n) 行列

（2）　AB の (i, j) 成分を c_{ij} と置いたとき

$$\begin{aligned}c_{ij} &= a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}\\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \qquad (i=1,\cdots,l,\ \ j=1,\cdots,n)\end{aligned}$$

すなわち

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ & \cdots\cdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im}\\ & \cdots\cdots & & \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{kn}\\ & \cdots\cdots & \\ \cdots & \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} & \cdots\\ & \cdots\cdots & \\ \sum_{k=1}^{m} a_{lk}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} a_{lk}b_{kn}\end{pmatrix}=\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right)$$

A と B の積は，A の列の個数と B の行の個数が等しくなければ定義されない．

例 8　$A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 7 & 5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}$

と置くとき

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-3)\cdot 1 + 2\cdot(-2) & (-3)\cdot 4 + 2\cdot 1 \\ 7\cdot 1 + 5\cdot(-2) & 7\cdot 4 + 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -10 \\ -3 & 33 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + (-2)\cdot 2 + 3\cdot 5 & 1\cdot 4 + (-2)\cdot(-3) + 3\cdot 1 \\ 2\cdot 0 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 5 & 2\cdot 4 + 1\cdot(-3) + (-1)\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

同様にして

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -11 \\ 17 & -9 & 16 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 25 & 22 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ -4 & -7 & 9 \\ 7 & -9 & 14 \end{pmatrix}$$

となる．したがって，$AB \neq BA$，$CD \neq DC$ であり，行列の積は一般には交換可能ではない．また，積 AC は定義されても CA は定義されない．

例 9　x_1, x_2, x_3 を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

は行列を用いると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

と表される．

問 8　$A=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 2\\ 6 & 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 0 & 4\\ -3 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 6 & 1\end{pmatrix}$

$D=\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ 0 & 5 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$ のとき，次の行列を求めよ．

（1）$A+B$　（2）$2A-3B$　（3）CA　（4）BD

問 9　次が成り立つことを示せ．ただし，演算はすべて定義されているとする．

（1）$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$　（2）$\overline{cA}=\overline{c}\,\overline{A}$　（3）$\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$

問 10　行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ がすべての 2 次正方行列 $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$ と交換可能，$AX=XA$，となるための必要十分条件を求めよ．また，一般の n 次正方行列の場合はどうか．

n 次正方行列において対角成分がすべて 1 で，残りの成分がすべて 0 の行列

$$E=\begin{pmatrix}1 & & & O\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1\end{pmatrix}$$

を n 次**単位行列**という．次数をはっきりさせるときは E_n と書く．$E=(\delta_{ij})$ と表すと

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

となる．この記号を**クロネッカーのデルタ**という．また，行列 E を

$$E=(\boldsymbol{e}_1\quad \boldsymbol{e}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{e}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1{}'\\ \boldsymbol{e}_2{}'\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n{}'\end{pmatrix}$$

と列ベクトルおよび行ベクトル表示すると

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_1' = (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$$

$$\boldsymbol{e}_2' = (0 \quad 1 \quad \cdots \quad 0)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{e}_n' = (0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1)$$

となる．

注意　単位行列 E のときのように，行列を

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & O \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

などと表すことがある．この場合 O と書いた部分の成分はすべて 0，$*$ と書いた部分の成分にはとくに注目せず，任意の数でよいことを意味する．

定理 1.8

行列の積に関して次が成り立つ．ただし，演算はすべて定義されているとする．

（１）　$(AB)C = A(BC)$

（２）　$(A+B)C = AC+BC$

（３）　$A(B+C) = AB+AC$

（４）　$AO = OA = O$

（５）　$AE = EA = A$

（６）　$(cA)B = A(cB) = c(AB)$

証明　（１）を示す．A を (l, m) 行列，B を (m, n) 行列，C を (n, p) 行列とする．このとき $(AB)C$ と $A(BC)$ はともに (l, p) 行列になり

$$(AB)C \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{st} \right) c_{tj}$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} a_{is} b_{st} c_{tj}$$

$$A(BC) \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} \left(\sum_{t=1}^{n} b_{st} c_{tj} \right)$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} a_{is} b_{st} c_{tj}$$

であるから，$(AB)C$ と $A(BC)$ は一致する．残りも同様に証明できる．▨

問 11　定理 1.8 の（2）～（6）を証明せよ．

例 10
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が示すように，$A \neq O$，$B \neq O$ でも $AB = O$ となることがある．

◈ 行列の転置 ◈

$A = (a_{ij})$ を (m, n) 行列とする．A の行と列を入れかえて得られる (n, m) 行列を ${}^t\!A$ と書き，A の**転置行列**という．したがって

${}^t\!A$ の (i, j) 成分は a_{ji} である．

また，A の共役行列の転置行列 ${}^t\overline{A}$ を A^* で表す．したがって

A^* の (i, j) 成分は $\overline{a}_{ji}$ である．

例 11　$A = \begin{pmatrix} -7+2i & 4 & -3i \\ 9-3i & 6 & 1+5i \end{pmatrix}$ のとき

$${}^t\!A = \begin{pmatrix} -7+2i & 9-3i \\ 4 & 6 \\ -3i & 1+5i \end{pmatrix}, \qquad A^* = \begin{pmatrix} -7-2i & 9+3i \\ 4 & 6 \\ 3i & 1-5i \end{pmatrix}$$

である．

定理 1.9

行列の転置に関して次が成り立つ．ただし，演算はすべて定義されているとする．

（1）　${}^t({}^t\!A) = A$

（2）　${}^t(cA) = c\,{}^tA$

（3）　${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

（4）　${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

証明　（1），（2），（3）は定義から容易にわかるので（4）を示す．$A = (a_{ij})$ を (l, m) 行列，$B = (b_{ij})$ を (m, n) 行列とすると，${}^tA = (\alpha_{ij})$ は (m, l) 行列で $\alpha_{ij} = a_{ji}$，${}^tB = (\beta_{ij})$ は (n, m) 行列で $\beta_{ij} = b_{ji}$ となる．したがって，${}^t(AB)$ と ${}^tB\,{}^tA$ はともに (n, l) 行列である．そして

$$\begin{aligned} {}^t(AB) \text{ の } (i, j) \text{ 成分} &= AB \text{ の } (j, i) \text{ 成分} \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{m} \beta_{ik} \alpha_{kj} \\ &= {}^tB\,{}^tA \text{ の } (i, j) \text{ 成分} \end{aligned}$$

▨

問 12　次の行列 A に対して，${}^tAA,\ A\,{}^tA,\ A^*A,\ AA^*$ を求めよ．

（1）　$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$　　（2）　$\begin{pmatrix} 2i & 0 & 1+i \\ -1 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$

問 13　次が成り立つことを示せ．ただし，演算はすべて定義されているとする．

（1）　$(A^*)^* = A$　　（2）　$(cA)^* = \bar{c}A^*$

（3）　$(A+B)^* = A^* + B^*$　　（4）　$(AB)^* = B^*A^*$

◈ 行列の分割 ◈

行列を扱う場合，行列をいくつかの縦線と横線で分割して考えると便利なことがある．たとえば

$$A = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 5 & -3 \\ 4 & -7 & 8 & 11 \\ -1 & 5 & 0 & 9 \\ \hdashline 2 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

このとき，分けられた各ブロックを**小行列**という．ここで

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & -7 & 8 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = (2 \quad 1 \quad -3), \qquad A_{22} = (-9)$$

と置けば

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

と表される．

同じ型の行列を同じ方法で分割したとき

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ & \cdots\cdots & & \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2q} \\ & \cdots\cdots & & \\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pq} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1q}+B_{1q} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2q}+B_{2q} \\ & \cdots\cdots & & \\ A_{p1}+B_{p1} & A_{p2}+B_{p2} & \cdots & A_{pq}+B_{pq} \end{pmatrix}$$

と

$$c\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ & \cdots\cdots & & \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cA_{11} & cA_{12} & \cdots & cA_{1q} \\ cA_{21} & cA_{22} & \cdots & cA_{2q} \\ & \cdots\cdots & & \\ cA_{p1} & cA_{p2} & \cdots & cA_{pq} \end{pmatrix}$$

が成り立つことは定義から明らかである．積に関しても次の定理が成り立ち，小行列をあたかも数とみなして計算してよいことになる．証明は省略する．

定理 1.10

積の定義される 2 つの行列 A, B を小行列に分割するとき，次が成り立つ．ただし，分割された A_{ik} と B_{kj} の積も定義されるとする．

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ & \cdots\cdots & & \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ & \cdots\cdots & & \\ & \cdots\cdots & & \\ B_{q1} & B_{q2} & \cdots & B_{qr} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{q} A_{1k}B_{k1} & \sum_{k=1}^{q} A_{1k}B_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{q} A_{1k}B_{kr} \\ \sum_{k=1}^{q} A_{2k}B_{k1} & \sum_{k=1}^{q} A_{2k}B_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{q} A_{2k}B_{kr} \\ & \cdots\cdots & & \\ \sum_{k=1}^{q} A_{pk}B_{k1} & \sum_{k=1}^{q} A_{pk}B_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{q} A_{pk}B_{kr} \end{pmatrix}$$

例 12　$A = (a_{ij})$ を (l, m) 行列，$B = (b_{ij}) = (\boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{b}_n)$ を (m, n) 行列とする．このとき

$$AB = A(\boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{b}_n) = (A\boldsymbol{b}_1 \quad A\boldsymbol{b}_2 \quad \cdots \quad A\boldsymbol{b}_n)$$

が成り立つ．

問 14　行列の分割が次で与えられているとき，定理 1.10 を確かめよ．

$$A = \left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{c:cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ \hdashline b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{array}\right)$$

1.3　正 方 行 列

この節で取り扱う行列はすべて正方行列とする．n 次正方行列全体の集合 M_n の中では，これまでに定義した行列のスカラー倍，行列の和，行列の積は常に可能である．また，行列の転置をとることに関しても閉じている．そして，これらの演算では，結合法則や分配法則など数の世界と類似の法則が成り立っている．また，数における 0 の役割を零行列 O が，1 の役割を単位行列 E が果たしている．しかし，積の交換法則が成り立たないなど異なった点もいくつかある．正方行列は行列の理論の中でとくに重要である．

◈行列のトレース◈

n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の対角成分の和を

$$\mathrm{tr}\,A = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

と表し，A の**トレース**という．

問 15　次が成り立つことを示せ．

（1）　$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}\,A+\mathrm{tr}\,B$　　（2）　$\mathrm{tr}(cA) = c\,\mathrm{tr}\,A$

問 16　A を (m, n) 行列，B を (n, m) 行列とするとき，$\mathrm{tr}\,AB = \mathrm{tr}\,BA$ が成り立つことを示せ．

◈ いろいろな行列 ◈

対角成分以外の成分がすべて 0 の行列

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & O \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & d_n \end{pmatrix}$$

を**対角行列**という．単位行列 E はその 1 つの例である．とくに cE の形をした行列を**スカラー行列**という．

対角成分より下の成分がすべて 0 である行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を**上 3 角行列**という．同様に，対角成分より上の成分がすべて 0 の行列を，**下 3 角行列**という．

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が

$$^tA = A \qquad \text{すなわち} \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

を満たすとき**対称行列**といい

$$ {}^tA = -A \qquad \text{すなわち} \qquad a_{ij} = -a_{ji} $$

を満たすとき**交代行列**という．対称行列でありかつ交代行列でもある行列は零行列 O に限る．それは，${}^tA = A = -A$ より $2A = O$，したがって，$A = O$ となるからである．

例題 1.3　任意の正方行列 A は，対称行列 S と交代行列 T の和として

$$ A = S + T $$

一意的に書けることを示せ．

解答　$S = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$，$T = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ とおけば $A = S + T$ と書ける．

$$ {}^tS = \frac{1}{2}({}^tA + A) = \frac{1}{2}(A + {}^tA) = S $$

$$ {}^tT = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA) = -T $$

より，S は対称行列，T は交代行列である．別に $A = S' + T'$ と書けたとすると，$S + T = S' + T'$，したがって，$S - S' = T' - T$ が成り立つ．$S - S'$ は対称行列，$T - T'$ は交代行列であるから，$S - S' = T - T' = O$ となる．したがって，$S = S'$，$T = T'$ が成り立つ．

例 13

$$ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} $$

◈ 正則行列 ◈

正方行列 A に対して

$$ AX = XA = E $$

を満たす正方行列 X が存在するとき，A は**正則行列**であるといい，X を A の**逆行列**という．ここで，X と Y がともに A の逆行列であれば，$XA = E$，$AY = E$ より

$$ X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y $$

となり，逆行列は存在すれば一意的に定まる．A の逆行列を A^{-1} と表す．した

がって，A が正則のとき

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

例 14　2次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は，$ad - bc \neq 0$．このとき，逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である．

定理 1.11

行列 A, B を正則行列とするとき，次が成り立つ．

（1）　逆行列 A^{-1} も正則で，$(A^{-1})^{-1} = A$

（2）　転置行列 A も正則で，$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

（3）　行列の積 AB も正則で，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

証明　$AA^{-1} = A^{-1}A = E$ を A^{-1} から見れば，A が A^{-1} の逆行列とみなせる．（2）は $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ の転置をとると，${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tE = E$ となり，${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^tA{}^t(A^{-1}) = E$ がいえるから．（3）は定理 1.8 より，$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$ となるから．　■

問 17　$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，次の行列を求めよ．

（1）　A^{-1}　　（2）　B^{-1}　　（3）　$({}^tA)^{-1}$　　（4）　$(AB)^{-1}$

例題 1.4　1つの列または1つの行の成分がすべて0である行列は正則でない．

解答　行列 $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_j \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ の第 j 列 $\boldsymbol{a}_j$ の成分がすべて0とする．仮に $XA = E$ を満たす行列 X が存在したとする．このとき，XA の第 j 列は $X\boldsymbol{a}_j$ となり，成分はすべて0．しかし，E の第 j 列は $\boldsymbol{e}_j$ であるので，これは矛盾である．行についても同様である．

◈行列の r 乗◈

A を正方行列とするとき，A の**べき**を

$$A^0 = E, \qquad A^r = AA^{r-1} \qquad (r \geqq 1)$$

で帰納的に定義する．A が正則のときは負のべきも

$$A^{-r} = (A^{-1})^r \qquad (r \geqq 1)$$

で定義する．このとき $A^{r+s} = A^r A^s$，$(A^r)^s = A^{rs}$ が成り立つ．

$A^r = O$ となる自然数 r が存在するとき，A を**べき零行列**という．

問 18　次の行列 A の r 乗を求めよ．

（1）$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　（4）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問 19　べき零行列は正則でないことを示せ．

練 習 問 題 1

[**A**]

1.　次の条件を満たす複素数 z はどのような図形または領域を表すか．複素平面上に図示せよ．

（1）$|z-1| = 1$　　（2）$|z-2i| \leqq 1$　　（3）$|z| > |z+i|$

（4）$\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{z} \geqq 1$　　（5）$\arg(z+1) = \dfrac{\pi}{4}$

2.　$z = 1+i$ を極形式に表すことにより，次の複素数を計算せよ．

（1）z^{10}　　（2）z^{-7}　　（3）$\bar{z}^5$

3.　ド・モアブルの公式を用いて次の公式を導け．

（1）$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$　　（2）$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

4.　次の方程式を解け．

（1）$z^4 = -1$　　（2）$z^3 = i$　　（3）$z^2 = 1+i$

5.　次の行列のうちで積の定義できる組について，すべて積を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，次の行列を求めよ．

（1） $(2A-B)(A+B)$　（2） $A^2-2AB+BA$

（3） $A^3-3A+2E$　（4） ${}^tA+3B+{}^tBA$

7. 複素数 $z = x+iy\ (x, y \in \boldsymbol{R})$ に対して，2 次行列 $A(z) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ を対応させるとき，次が成り立つことを示せ．

（1） $A(z_1+z_2) = A(z_1)+A(z_2)$　（2） $A(z_1z_2) = A(z_1)A(z_2)$

（3） $A(z^{-1}) = A(z)^{-1}\ \ (z \neq 0)$　（4） $A(\bar{z}) = {}^tA(z)$

8. 次の行列と交換可能な行列をすべて求めよ．

（1） $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　（2） $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　（3） $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. 次の行列の逆行列を求めよ．

（1） $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$　（2） $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

（3） $\begin{pmatrix} 2i & -7 \\ i & 3+i \end{pmatrix}$　（4） $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

10. 次の行列の r 乗を計算せよ．

（1） $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$　（2） $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$　（3） $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

11. 3 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の (i, j) 成分が次で与えられているとき，行列 A を具体的に書け．

（1） $a_{ij} = (-1)^{i+j}$　（2） $a_{ij} = i+j$

（3） $a_{ij} = \delta_{ij}-\delta_{i,j+1}$　（4） $a_{ij} = i\delta_{ij}$

[B]

1. A を n 次正方行列，P を正則な n 次正方行列とする．次が成り立つことを示せ．

$$(P^{-1}AP)^r = P^{-1}A^rP \qquad (r \in \boldsymbol{N})$$

2. （1） 行列 A がべき零で $A^r = O$ を満たすとする．このとき，$E-A$ は正則であり，その逆行列が

$$(E-A)^{-1} = E+A^1+\cdots+A^{r-1}$$

となることを示せ．

（2） 行列$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$の逆行列を求めよ．

3． 行列 $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は，A_1 と A_3 が正則であり，このとき $A^{-1}=\begin{pmatrix} {A_1}^{-1} & -{A_1}^{-1}A_2{A_3}^{-1} \\ O & {A_3}^{-1} \end{pmatrix}$ となることを示せ．

4． 次の行列の逆行列を求めよ．

（1） $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　　（2） $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

（3） $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5． n 次正方行列 A, B に対して，A と B の**交換子積**を $[A, B]=AB-BA$ で定義する．次が成り立つことを示せ．

（1） $[A, B]=-[B, A]$，とくに，$[A, A]=O$

（2） $[[A, B], C]+[[B, C], A]+[[C, A], B]=O$

2

行 列 式

2.1 置　　換

◈置　換◈

有限集合 X から X 自身への 1 対 1 の写像 $\sigma\colon X \to X$ を **X 上の置換**という．n 個の元からなる集合の代表として $J_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ をとる．J_n 上の置換を **n 文字の置換**といい，その全体を S_n と書く．$\sigma(1) = i_1$，$\sigma(2) = i_2$，$\cdots$，$\sigma(n) = i_n$ であるとき

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

と表す．ここで $i_1, i_2, \cdots, i_n$ は $1, 2, \cdots, n$ の順序を入れかえて並べたもの，つまり**順列**になっている．逆に 1 つの順列は 1 つの置換を与えるので，S_n は $n! = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$ 個の元からなる．置換 σ の書き方は，上下にある文字の対を変えなければ，書く順序は入れかえてもよい．

例 1　3 文字の置換全体は，次の $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ 個である．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

例 2
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

J_n 上の2つの置換 σ, τ に対して，これらの合成写像

$$\sigma\tau : J_n \xrightarrow{\ \tau\ } J_n \xrightarrow{\ \sigma\ } J_n$$

が考えられる．これを σ と τ の**積**といい，i を $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$ にうつす J_n 上の置換となる．

例3　（1）　$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

（2）　$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

この例が示すように，一般には $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ となり，置換の積は交換可能ではない．J_n のどの文字も動かさない置換を**恒等置換**といい

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

で表す．置換 σ の逆写像を**逆置換**といい σ^{-1} で表す．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

である．

例4　$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ のとき

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

定理 2.1

ρ, σ, τ を n 文字の置換とするとき，次が成り立つ．

（1）　$(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$

（2）　$\varepsilon\sigma = \sigma\varepsilon = \sigma$

（3）　$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \varepsilon$

（4） $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$

証明 （1）を示すには，i $(1 \leqq i \leqq n)$ のうつり先が等しいことをいえばよい．実際

$$((\rho\sigma)\tau)(i) = (\rho\sigma)(\tau(i)) = \rho(\sigma(\tau(i)))$$
$$(\rho(\sigma\tau))(i) = \rho((\sigma\tau)(i)) = \rho(\sigma(\tau(i)))$$

である．（2），（3），（4）も同様に証明できる． ∎

問1 4文字の置換全体 S_4 をすべて書きだせ．

問2 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき，次を求めよ．

（1） σ^{-1}　（2） $\sigma\tau$　（3） $\tau\sigma$　（4） $\sigma^{-1}\tau\sigma$

◈偶置換と奇置換◈

J_n の中の2つの異なる文字 i, j に対して，i と j だけを入れかえ他の文字は動かさない置換，つまり $\sigma(i) = j$，$\sigma(j) = i$，$\sigma(k) = k$ $(k \neq i, j)$ を $\sigma = (i \quad j)$ と書き，i と j の**互換**という．さらに，$i_1, i_2, \cdots, i_r$ を J_n の互いに異なる文字とする．置換 σ が $\sigma(i_1) = i_2$，$\sigma(i_2) = i_3$，$\cdots$，$\sigma(i_r) = i_1$ を満たし，その他の文字を動かさないとき，σ を r 次の**巡回置換**といい $\sigma = (i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_r)$ と表す．互換は2次の巡回置換のことである．

一般に任意の置換は，次の例が示すように，互いに交換可能ないくつかの巡回置換の積として表すことができる．

例5 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$\sigma(1) = 4$，$\sigma(4) = 3$，$\sigma(3) = 7$，$\sigma(7) = 1$，$\sigma(2) = 6$，$\sigma(6) = 5$，$\sigma(5) = 2$ より

$$\sigma = (1 \quad 4 \quad 3 \quad 7)(2 \quad 6 \quad 5) = (2 \quad 6 \quad 5)(1 \quad 4 \quad 3 \quad 7)$$

また，巡回置換 $\sigma = (i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_r)$ は

$$\begin{aligned} \sigma &= (i_1 \quad i_r)(i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_{r-1}) \\ &= (i_1 \quad i_r)(i_1 \quad i_{r-1})\cdots(i_1 \quad i_3)(i_1 \quad i_2) \end{aligned}$$

と互換の積として表される．したがって，次の定理が一般に成り立つ．

定理 2.2

任意の置換は互換の積として表すことができる．

置換を互換の積として表す方法は1通りではない．

例 6

$$\begin{aligned}(1\ \ 4\ \ 2\ \ 3) &= (1\ \ 3)(1\ \ 2)(1\ \ 4)\\ &= (1\ \ 4)(2\ \ 3)(1\ \ 3)(4\ \ 3)(1\ \ 4)\end{aligned}$$

しかし，用いられる互換の個数の偶奇については次の規則がある．

定理 2.3

1つの置換を互換の積で表すとき，互換の個数が偶数であるか奇数であるかは表し方によらず一定である．

証明　$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を n 変数多項式とする．置換 $\sigma \in S_n$ に対して，f の各変数 x_i を $x_{\sigma(i)}$ に置きかえて得られる多項式を σf と書く．すなわち

$$\sigma f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

定義より $(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f)$ $(\sigma, \tau \in S_n)$ が成り立つ．

ここで**差積**と呼ばれる次の n 変数多項式 $\varDelta$ を考える．

$$\begin{aligned}\varDelta = \varDelta(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i - x_j)\\ &= (x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)\\ &\qquad (x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)\\ &\qquad\qquad \cdots\cdots\\ &\qquad\qquad (x_{n-1}-x_n)\end{aligned}$$

このとき

$$\sigma\varDelta = \sigma\varDelta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$$

より，$\sigma\varDelta$ は $\varDelta$ または $-\varDelta$ と一致する．とくに σ が互換 $(i\ \ j)$ $(i<j)$ のときは

（1）　$x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)} = x_j - x_i = -(x_i - x_j)$

（2） $(x_{\sigma(k)}-x_{\sigma(i)})(x_{\sigma(k)}-x_{\sigma(j)}) = (x_k-x_j)(x_k-x_i) \quad (k<i)$
$= (x_k-x_i)(x_k-x_j)$

（3） $(x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(k)})(x_{\sigma(k)}-x_{\sigma(j)}) = (x_j-x_k)(x_k-x_i) \quad (i<k<j)$
$= (x_i-x_k)(x_k-x_j)$

（4） $(x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(k)})(x_{\sigma(j)}-x_{\sigma(k)}) = (x_j-x_k)(x_i-x_k) \quad (j<k)$
$= (x_i-x_k)(x_j-x_k)$

（5） その他の因子は不変

であるから，$\sigma\varDelta = -\varDelta$ となる．一般の置換 σ については，それを2通りの互換の積

$$\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_r = \rho_1\rho_2\cdots\rho_s$$

で表すと

$$\sigma\varDelta = (-1)^r\varDelta = (-1)^s\varDelta$$

が成り立つ．したがって，$(-1)^r = (-1)^s$ となり，r が偶数のとき s も偶数，r が奇数のとき s も奇数になる． ▨

偶数個の互換の積で表される置換を**偶置換**，奇数個で表される置換を**奇置換**という．置換 σ の**符号** $\operatorname{sgn}\sigma$ を次で定義する．

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} 1 & (\sigma\text{ は偶置換}) \\ -1 & (\sigma\text{ は奇置換}) \end{cases}$$

これより $\sigma\varDelta = (\operatorname{sgn}\sigma)\varDelta$ となる．

例7　r 次の巡回置換は r が偶数のとき奇置換，r が奇数のとき偶置換である．

符号の定義より次の定理が成り立つ．

定理 2.4

σ, τ を n 文字の置換とするとき，次が成り立つ．

（1） $\operatorname{sgn}\varepsilon = 1$，ここで ε は恒等置換

（2） $\operatorname{sgn}\sigma\tau = \operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\tau$

（3） $\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma$

例 8　（1）　$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(1\ \ 2) = -1$

（2）　$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} = 1$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(1\ \ 2\ \ 3) = \operatorname{sgn}(1\ \ 3)(1\ \ 2) = 1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(1\ \ 3\ \ 2) = \operatorname{sgn}(1\ \ 2)(1\ \ 3) = 1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(2\ \ 3) = -1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(1\ \ 3) = -1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(1\ \ 2) = -1$$

問 3　次の置換を互換の積で表し，符号を求めよ．

（1）　$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\3 & 6 & 2 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix}$　　（2）　$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\7 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$

問 4　問 3 の置換 σ に対して，$\sigma^k = \varepsilon$ となる最小の自然数 k を求めよ．

2.2　行　列　式

◈ 2 次の行列式 ◈

行列式とは，正方行列に対して，ある規則で 1 つの数値を対応させるもので，連立 1 次方程式の解法や，微分積分の変数変換の取り扱いなどで重要な役割を果たす．

ここで 2 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & ① \\ a_2x + b_2y = c_2 & ② \end{cases}$$

の解法を振り返る．

$$①\times b_2-②\times b_1 \quad より \quad (a_1b_2-a_2b_1)x = c_1b_2-c_2b_1$$
$$①\times a_2-②\times a_1 \quad より \quad (a_2b_1-a_1b_2)y = a_2c_1-a_1c_2$$

であるから，$a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ ならば

$$x = \frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad y = \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

と解が1組求まる．$a_1b_2-a_2b_1 = 0$ のときは，解が無数にあるか，または存在しないかのどちらかである．

2次の行列式を

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

で定義すると，解は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

と表され，解と係数の関係が見やすい形になる．

◈ 行列式の定義 ◈

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，A の**行列式**を

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\,\sigma\ a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

で定義する．A の行列式は，この他にも

$$\det A, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad |a_{ij}|, \quad |\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n|$$

などと表される．

例 9　前節の例8を用いると

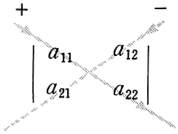
（1）　$n = 1$ のとき，$|a_{11}| = a_{11}$

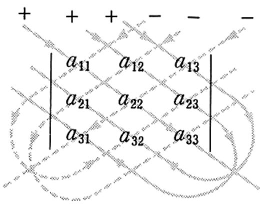
（2）　$n=2$ のとき，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

これは先の定義と一致する．

（3）　$n=3$ のとき，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$

2次と3次の行列式は，**サラスの方法**と呼ばれる次の図で記憶すると便利である．ただし，4次以上の行列式についてはこのような簡単な覚え方はない．





例 10　（1）　$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = 3\times(-2)-4\times 9 = -42$

（2）　$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\times(-1)\times 3+3\times 2\times 2+(-5)\times(-4)\times 0$
$-1\times 2\times 0-(-5)\times(-1)\times 2-3\times(-4)\times 3$
$= 35$

問 5　次の行列式の値を求めよ．

（1）　$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$　　（2）　$\begin{vmatrix} 2-3i & 1+2i \\ 4i & -1+i \end{vmatrix}$　　（3）　$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

（4）　$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$　　（5）　$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

（6）$\begin{vmatrix} -2 & 8 & 6 \\ 3 & -6 & -5 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$　　（7）$\begin{vmatrix} 1 & i & -i \\ -1 & i & 1 \\ i & 1 & i \end{vmatrix}$

例題 2.1　次が成り立つことを示せ．

（1）
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（2）
$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & O \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

解答　（1）　行列式の定義

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \; a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

で $a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0$ と置くと，和は $\sigma(1) = 1$ となる置換についてだけ考えればよい．このような置換全体の集合

$$S'_{n-1} = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$$

は $n-1$ 個の文字の集合 $K_{n-1} = \{2, 3, \cdots, n\}$ 上の置換全体と一致する．置換の符号の定義が集合に属する文字の個数にのみ依存し，文字の種類にはよらないことに注意すれば，K_{n-1} 上の置換全体は符号もこめて S_{n-1} と同一視できる．したがって

$$|A| = a_{11} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \tau \; a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}\cdots a_{n\tau(n)}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

となる．（2）は（1）を繰り返し用いればよい．

問6　次の行列式の値を求めよ．

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$　（2）$\begin{vmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3i & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1-i & 2 \\ 6 & -7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 4 \end{vmatrix}$

◈行列式の性質◈

行列式は行と列の対称性，線形性，交代性という基本的性質を持っている．n 次正方行列 A の関数がこれらの性質を持つならば，それは n 次行列式の定数倍に限られることも知られている．

定理 2.5（行と列の対称性）

n 次正方行列 A の行列式とその転置行列 ${}^tA$ の行列式は等しい．すなわち

$$|A| = |{}^tA|$$

証明　$A = (a_{ij})$ とし，${}^tA = (b_{ij})$ とおくと $b_{ij} = a_{ji}$．したがって

$$\begin{aligned} |{}^tA| &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \end{aligned}$$

ここで $\tau = \sigma^{-1}$ と表せば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} \tau = \sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．また，$\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \tau$ であり，σ が S_n を動くとき τ も S_n 全体を動く

から

$$|{}^tA| = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \tau \, a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\cdots a_{n\tau(n)} = |A|$$

となる. ▩

この定理より，行に関して成り立つ行列式の性質は列に関しても成り立ち，その逆もいえる．また，行列式の定義として

（＊）　$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

を採用してもよい．

例題 2.2　（1）　$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（2）　$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ O & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

解答　例題 2.1 に対して，行と列の対称性を適用すればよい．

以下，この節では定理を列についてだけ述べる．

定理 2.6（交代性）

（1）　置換 $\sigma \in S_n$ で列の順番を入れかえると，行列式は次を満たす．

$$|\boldsymbol{a}_{\sigma(1)} \quad \boldsymbol{a}_{\sigma(2)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{\sigma(n)}| = \operatorname{sgn} \sigma \, |\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n|$$

（2）　2 つの列を入れかえると行列式の符号が変わる．

$$|\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \overset{\text{第}\,i\,\text{列}}{\boldsymbol{a}_j} \ \cdots \ \overset{\text{第}\,j\,\text{列}}{\boldsymbol{a}_i} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n| = -|\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \overset{\text{第}\,i\,\text{列}}{\boldsymbol{a}_i} \ \cdots \ \overset{\text{第}\,j\,\text{列}}{\boldsymbol{a}_j} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n|$$

（3）　2 つの列が等しいとき，行列式は 0 である．

$$\overset{\text{第}i\text{列}}{} \qquad \overset{\text{第}j\text{列}}{}$$
$$|\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n| = 0$$

証明
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}_{\sigma(1)} \quad \boldsymbol{a}_{\sigma(2)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{\sigma(n)}| &= \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}\tau\; a_{1\sigma\tau(1)}a_{2\sigma\tau(2)}\cdots a_{n\sigma\tau(n)}\\ &= \operatorname{sgn}\sigma \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\tau\; a_{1\sigma\tau(1)}a_{2\sigma\tau(2)}\cdots a_{n\sigma\tau(n)}\\ &= \operatorname{sgn}\sigma \sum_{\rho\in S_n} \operatorname{sgn}\rho\; a_{1\rho(1)}a_{2\rho(2)}\cdots a_{n\rho(n)}\\ &= \operatorname{sgn}\sigma\, |\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n|\end{aligned}$$

ここで定理2.4より

$$\operatorname{sgn}\tau = \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\sigma\tau$$

が成り立ち，τ が S_n を動くとき，$\rho = \sigma\tau$ も S_n 全体を動くことを用いた．

（2）は（1）で互換 $\sigma = (i \quad j)$ をとった場合である．

（3）は（2）で $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ とおくと，符号を除いて両辺に同じものが現れるから．▩

定理 2.7（線形性）

次の等式が成り立つ．

（1）$|\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad c\boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n| = c\,|\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n|$

（2）$|\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i' + \boldsymbol{a}_i'' \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n| = |\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i' \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n| + |\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i'' \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n|$

証明　（1）　行列式の定義として（＊）を用いると

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad c\boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n|\\ &\quad = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\; a_{\sigma(1)1}\cdots(c a_{\sigma(i)i})\cdots a_{\sigma(n)n}\\ &\quad = c \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\; a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(i)i}\cdots a_{\sigma(n)n}\\ &\quad = c\,|\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n|\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i' + \boldsymbol{a}_i'' \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n|\\ &\quad = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\; a_{\sigma(1)1}\cdots(a'_{\sigma(i)i} + a''_{\sigma(i)i})\cdots a_{\sigma(n)n}\\ &\quad = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\; a_{\sigma(1)1}\cdots a'_{\sigma(i)i}\cdots a_{\sigma(n)n}\\ &\qquad + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\; a_{\sigma(1)1}\cdots a''_{\sigma(i)i}\cdots a_{\sigma(n)n}\end{aligned}$$

$$= |\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i' \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n| + |\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i'' \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n|$$ ▩

定理 2.8

行列式は 1 つの列に他の列の定数倍を加えても値は変わらない．

$$|\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \overset{\text{第}\, i\, \text{列}}{\boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j} \quad \cdots \quad \overset{\text{第}\, j\, \text{列}}{\boldsymbol{a}_j} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n|$$

$$= |\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \overset{\text{第}\, i\, \text{列}}{\boldsymbol{a}_i} \quad \cdots \quad \overset{\text{第}\, j\, \text{列}}{\boldsymbol{a}_j} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n|$$

証明

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n| \\ &= |\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n| \\ &\quad + c\,|\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n| \\ &= |\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n| \end{aligned}$$ ▩

例 11　$A = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3)$ を 3 次正方行列とするとき

（1）　$|4A| = |4\boldsymbol{a}_1 \quad 4\boldsymbol{a}_2 \quad 4\boldsymbol{a}_3| = 64\,|A|$

（2）　$|\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 \quad 3\boldsymbol{a}_2 \quad -\boldsymbol{a}_3| = |\boldsymbol{a}_1 \quad 3\boldsymbol{a}_2 \quad -\boldsymbol{a}_3| + |2\boldsymbol{a}_2 \quad 3\boldsymbol{a}_2 \quad -\boldsymbol{a}_3|$

$= -3\,|\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3| - 6\,|\boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3| = -3\,|A|$

問 7　行列 A を例 11 と同じとするとき，次の行列式を $|A|$ を用いて表せ．

（1）　$|2\boldsymbol{a}_1 \quad 3\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 \quad \boldsymbol{a}_3|$　　（2）　$|2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_3 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad 3\boldsymbol{a}_2 + 5\boldsymbol{a}_3|$

（3）　$|\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 \quad \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_1|$

例題 2.3　次の行列式を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

解答　与式 $\underset{\substack{\text{第3行}+3\times\text{第1行} \\ \text{第4行}+2\times\text{第1行}}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 7 & 2 \\ 9 & 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}$

$$\underset{\substack{\text{第1列と第2列} \\ \text{の入れかえ}}}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & 2 \\ 0 & 9 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{例題2.2より}}{=} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 7 & 7 & 2 \\ 9 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{3次のサラスの方法より}}{=} 23$$

問8　次の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

例題2.4　行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$ を因数分解せよ．

解答　与式 $\underset{\substack{\text{第1列}+\text{第2列}+ \\ \text{第3列}+\text{第4列}}}{=} \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & d & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & b & a \end{vmatrix}$

$$
\underset{\text{第1列の線形性より}}{=} (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix}
$$

$$
\underset{\substack{\text{第2行}-\text{第1行} \\ \text{第3行}-\text{第1行} \\ \text{第4行}-\text{第1行}}}{=} (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & d-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}
$$

$$
\underset{\text{例題 2.2 より}}{=} (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}
$$

$$
\underset{\substack{\text{第1行}-\text{第2} \\ \text{行}+\text{第3行}}}{=} (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b+c-d & -a+b-c-d & a-b+c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}
$$

$$
\underset{\substack{\text{第2列}+\text{第1列} \\ \text{第3列}-\text{第1列}}}{=} (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d-b & a-b-c+d & 2b-2d \\ c-b & 0 & a+b-c-d \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)
$$

符号の定義に用いた差積 Δ は，次のように行列式で表される．

例題 2.5（ファンデルモンドの行列式）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \varDelta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

解答　n に関する帰納法でも証明できるが，因数定理を用いた次のような証明法もある．

左辺の行列式は，$x_i = x_j$ と置くと，第 i 列と第 j 列が等しくなり値は 0 になる．したがって，$x_i - x_j$ を因数にもち，それらの積 $\varDelta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ も因数にもつ．ここで，行列式と差積 $\varDelta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ はともに $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次の多項式である．したがって，定数倍を除いて一致しなければならない．両辺の ${x_2}^1{x_3}^2\cdots{x_n}^{n-1}$ の係数を比較すると，定数が $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ であることがわかる．

問 9　次の行列式を因数分解せよ．

（1）$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$

◈行列の積と行列式◈

定理 2.9

A, B を n 次正方行列とするとき，次が成り立つ．

$$|AB| = |A||B|$$

証明　$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{a}_n)$，$B = (\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{b}_n) = (b_{ij})$ と表すと

$$AB = (A\boldsymbol{b}_1 \quad A\boldsymbol{b}_2 \quad \cdots \quad A\boldsymbol{b}_n)$$
$$= (b_{11}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + b_{n1}\boldsymbol{a}_n \quad \cdots \quad b_{1n}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + b_{nn}\boldsymbol{a}_n)$$

と書け，行列式の線形性より

$$|AB| = \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n} b_{j_1 1}b_{j_2 2}\cdots b_{j_n n}\,|\boldsymbol{a}_{j_1} \quad \boldsymbol{a}_{j_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{j_n}|$$

となる．2 つの列が等しいとき行列式は 0 になるから，n^n 個の和 $\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}$ のうち，実際には相異なる $j_1, j_2, \cdots, j_n$ についての和だけをとればよい．このとき

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

と置けば，σ は置換になり

$$|AB| = \sum_{\sigma\in S_n} b_{\sigma(1)1}b_{\sigma(2)2}\cdots b_{\sigma(n)n}\,|\boldsymbol{a}_{\sigma(1)} \quad \boldsymbol{a}_{\sigma(2)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{\sigma(n)}|$$
$$= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\,\sigma\; b_{\sigma(1)1}b_{\sigma(2)2}\cdots b_{\sigma(n)n}\,|\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n|$$
$$= |\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n| \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\,\sigma\; b_{\sigma(1)1}b_{\sigma(2)2}\cdots b_{\sigma(n)n}$$
$$= |A||B|$$

▨

例 12　（1）$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$

の両辺の行列式をとると，次の等式を得る．

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

（2）

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ax+bz+cy & ay+bx+cz & az+by+cx \\ az+by+cx & ax+bz+cy & ay+bx+cz \\ ay+bx+cz & az+by+cx & ax+bz+cy \end{pmatrix}$$

の両辺の行列式をとると，次の等式を得る．

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

$$= (ax+bz+cy)^3+(ay+bx+cz)^3+(az+by+cx)^3$$
$$-3(ax+bz+cy)(ay+bx+cz)(az+by+cx)$$

◈ **クラメールの公式** ◈

3 元の連立 1 次方程式を行列を用いて

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

と表す．このとき

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．両辺の行列式をとると，それぞれ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

となる．したがって

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

のとき，方程式の解は

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

と表される．一般の方程式に対しても次が成り立つ．3 元の場合と同様にして証明できる．

定理 2.10（クラメールの公式）

未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

が与えられたとする．このとき，係数を成分とする行列 $A = (a_{ij})$ が $|A| \neq 0$ を満たせば，この方程式はただ 1 組の解をもち，次の形で表される．

$$x_j = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

（上の行列式で b の列は第 j 列）

例題 2.6　クラメールの公式を用いて，次の連立1次方程式を解け．

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

解答　係数行列の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 1 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 2$$

したがって，解は

$$x_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = \frac{7}{2}, \qquad x_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \frac{51}{2}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{63}{2}$$

となる．

問 10　クラメールの公式を用いて次の連立1次方程式を解け．

（1）$\begin{cases} 2x_1 \quad\; + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$　（2）$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} ix_1 + 2x_2 - ix_3 = 1 + i \\ 2ix_1 + x_2 + ix_3 = 2i \\ -x_1 + 3x_2 \quad\; = -3 \end{cases}$　（4）$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 12 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

2.3 行列式の展開

◈行列式の展開◈

n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ の，第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列の行列式を D_{ij} と置き，A の $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ **小行列式**という．すなわち

$$D_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

である．さらに $A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$ を A の $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ **余因子**という．ここで，符号 $(-1)^{i+j}$ は次のように交互に変化する．

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} & \cdots \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} & \cdots \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

例 13　$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ とするとき

$$D_{23}=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}=-52, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}D_{23}=52$$

行列式の第 j 列に関する線形性を用いると

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$
+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

となる．第 i 番目の行列式の計算において，最初に第 j 列を第 1 列にうつし，次に第 i 行を第 1 行にうつすと

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{j-1}\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{ij} & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{j-1}(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ 0 & a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}
$$

$$
= a_{ij}A_{ij}
$$

となる．このことをまとめると次の定理を得る．(2) は列で示したことを行で

考えればよい．

定理 2.11

A を n 次正方行列とするとき，次が成り立つ．

（1） $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$

（第 j 列に関する展開）

（2） $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

（第 i 行に関する展開）

この展開式は次の定理の特別な場合である．

定理 2.12

A を n 次正方行列とするとき，次が成り立つ．

（1） $a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = \delta_{jk}\,|A|$

（2） $a_{j1}A_{k1} + a_{j2}A_{k2} + \cdots + a_{jn}A_{kn} = \delta_{jk}\,|A|$

証明 （1）を証明する．$j = k$ のときは定理 2.11 の（1）に他ならない．$j \neq k$ のときは行列 A の第 k 列 $\boldsymbol{a}_k$ を第 j 列 $\boldsymbol{a}_j$ で置きかえた行列

$$B = (b_{ij}) = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \underset{\text{第 } j \text{ 列}}{\boldsymbol{a}_j} \ \cdots \ \underset{\text{第 } k \text{ 列}}{\boldsymbol{a}_j} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$$

を考え，これを第 k 列で展開する．つくり方より $b_{ik} = a_{ij}$，$B_{ik} = A_{ik}\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ であるから

$$\begin{aligned} 0 = |B| &= b_{1k}B_{1k} + b_{2k}B_{2k} + \cdots + b_{nk}B_{nk} \\ &= a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} \end{aligned}$$

となる．（2）も同様に証明できる． ▨

行列式の展開を用いると，高次の行列式も比較的簡単に計算できる．

例題 2.7 次の行列式を第 1 行と第 3 行でそれぞれ展開し，その値を計算せよ．

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

解答　第1行で展開すると

$$D=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 3 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=1\times(-28)+2\times(-51)+(-2)\times(-42)+(-1)\times 57=-103$$

第3行で展開すると

$$D=3\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 3 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=3\times(-23)+(-2)\times 17=-103$$

この例を見てもわかるように，一般に0の多い行（または列）で展開すると計算量が少なくてすむ．また，行列式の性質を用いて特定の行（または列）の成分に0を多くして，それから展開するとよい．

問11　次の行列式の値を求めよ．

（1） $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ （2） $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

n 次正方行列 A に対して，A の余因子を成分にもつ行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

を考えると，定理 2.12 は

$$A{}^t\tilde{A} = {}^t\tilde{A}A = |A|\,E$$

と同値である．行列 ${}^t\tilde{A}$ のことを A の**余因子行列**という．

定理 2.13

（1） n 次正方行列 A に対して

$$A \text{ が正則} \iff |A| \neq 0$$

（2） $|A| \neq 0$ のとき，A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,{}^t\tilde{A} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & \cdots\cdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

で与えられる．

証明 A が逆行列 A^{-1} をもてば，$AA^{-1} = E$ より $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |E| = 1$．したがって，$|A| \neq 0$．$|A| \neq 0$ のときは $B = \dfrac{1}{|A|}\,{}^t\tilde{A}$ とおけば，$AB = BA = E$ となり A は正則で $A^{-1} = B$ である． ■

例題 2.8 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

解答　$|A| = 6$ より A は正則.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 17, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -26$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

したがって，A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 17 & -26 & -2 \\ -8 & 14 & 2 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

逆行列の計算法としては，第3章で学ぶ行列の基本変形を用いる方法もある．また，計算機を用いた高次の行列の逆行列の計算法もいくつか知られている．

問 12　次の行列 A の余因子行列を求めよ．正則のときは逆行列も求めよ．

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$　（3）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

（4）$\begin{pmatrix} i & -1 & i \\ -1 & 1 & -1 \\ -i & -1 & i \end{pmatrix}$　（5）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

（6）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

練習問題 2

[A]

1. $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$ に対して，σ^{-1}, τ^{-1}, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, $\sigma^{-1}\tau\sigma$, $\tau^{-1}\sigma\tau$ を求めよ．

2. 次の置換を互換の積で表し，その符号を求めよ．

（1）$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&1&7&3&2&4&6\end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&6&5&7&3&2&1\end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$　（4）$(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7)$

3. n 文字の置換 S_n $(n \geqq 2)$ の中で，偶置換と奇置換の個数はともに $n!/2$ であることを示せ．

4. 次の行列式の値を求めよ．

（1）$\begin{vmatrix}-2&7&-3\\1&1&5\\4&-3&2\end{vmatrix}$　（2）$\begin{vmatrix}-1&2&0&1\\2&0&1&-1\\1&-1&2&0\\0&1&-1&2\end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix}3&-1&4&0\\1&5&-2&1\\-2&1&1&3\\0&2&-1&2\end{vmatrix}$　（4）$\begin{vmatrix}i&-1&2i&1\\1&-i&i&-1\\-i&1&1&3i\\1&2i&-1&2i\end{vmatrix}$

（5）$\begin{vmatrix}3&1&1&\cdots&1\\1&3&1&\cdots&1\\1&1&3&\cdots&1\\&&\cdots\cdots&&\\1&1&1&\cdots&3\end{vmatrix}$（$n$ 次）　（6）$\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&3&4&\cdots&1\\3&4&5&\cdots&2\\&&\cdots\cdots&&\\n&1&2&\cdots&n-1\end{vmatrix}$

5. 次の行列式を因数分解せよ．

（1）$\begin{vmatrix}1&a^2&a^3\\1&b^2&b^3\\1&c^2&c^3\end{vmatrix}$　（2）$\begin{vmatrix}2a+b+c&b&c\\a&a+2b+c&c\\a&b&a+b+2c\end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix}b^2+c^2&ab&ac\\ba&c^2+a^2&bc\\ca&cb&a^2+b^2\end{vmatrix}$　（4）$\begin{vmatrix}(a+b)^2&b^2&a^2\\b^2&(b+c)^2&c^2\\a^2&c^2&(c+a)^2\end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & b & c & d \\ c & c & c & d \\ d & d & d & d \end{vmatrix}$　　(6) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \\ b & c & a & d \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$　　(8) $\begin{vmatrix} a+b & b & b & \cdots & b \\ b & a+b & b & \cdots & b \\ b & b & a+b & \cdots & b \\ & & \cdots\cdots & & \\ b & b & b & \cdots & a+b \end{vmatrix}$　(n 次)

6. 次の方程式を解け.

(1) $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$　　(2) $\begin{vmatrix} x+3 & -1 & -1 \\ 1 & x+1 & 0 \\ 1 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

7. 次の行列の逆行列を余因子を計算して求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} i & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -i \\ 1 & 2i & 1 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

[B]

1. 置換 σ において，$i < j$ かつ $\sigma(i) > \sigma(j)$ となる組 (i, j) の総数を σ の**転倒数**という.

(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の転倒数を求めよ.

(2) 次が成り立つことを示せ.

σ が偶置換 $\iff$ σ の転倒数が偶数

σ が奇置換 $\iff$ σ の転倒数が奇数

2. 任意の n 文字の置換 σ は，高々 $n-1$ 個の互換の積として表されることを証明せよ.

3. A を r 次正方行列，C を s 次正方行列とするとき，次の等式を証明せよ.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = |A||C|$$

4. A, B をともに n 次正方行列とするとき，次の等式を証明せよ．

（1）$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$

（2）$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+iB||A-iB|$

5. △ABC の 3 つの角 A, B, C に対して，次が成り立つことを示せ．

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos \mathrm{A} & \cos \mathrm{B} \\ \cos \mathrm{A} & -1 & \cos \mathrm{C} \\ \cos \mathrm{B} & \cos \mathrm{C} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

6. $D_n = \begin{vmatrix} x-a_1 & 1 & & & O \\ -1 & x-a_2 & 1 & & \\ & -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & & 1 \\ O & & & -1 & x-a_n \end{vmatrix}$ と置く．ただし，$D_0 = 1$，$D_1 = x-a_1$ とする．

（1）D_2, D_3 を求めよ．

（2）$D_{n+1} = (x-a_{n+1})D_n + D_{n-1}$ が成り立つことを示せ．

7. $A = (a_{ij})$ の成分がすべて整数とする．このとき，A の逆行列の成分もすべて整数となるための必要十分条件は $|A| = \pm 1$ である．このことを証明せよ．

3

連立１次方程式

3.1　行列の基本変形

◈基本変形◈

連立１次方程式

$$(\mathrm{i})\quad \begin{cases} 2x+3y-\ \ z = \ \ 11 \\ \ \ x-\ \ y+2z = -2 \\ \ \ x+2y \qquad = \ \ 5 \end{cases}$$

を式の加減を行うことで解いてみよう．

最初の２つの式を入れかえて

$$(\mathrm{ii})\quad \begin{cases} x-\ \ y+2z = -2 & ① \\ 2x+3y-\ \ z = \ \ 11 & ② \\ x+2y \qquad = \ \ 5 & ③ \qquad ②+①\times(-2),\ ③+①\times(-1). \end{cases}$$

以下，右上に書いた変形を行う．

$$(\mathrm{iii})\quad \begin{cases} x-y+2z = -2 & ① \\ \ \ 5y-5z = \ \ 15 & ② \\ \ \ 3y-2z = \ \ 7 & ③ \qquad ②\times(1/5) \end{cases}$$

$$(\mathrm{iv})\quad \begin{cases} x-y+2z = -2 & ① \\ \ \ \ \ y-\ \ z = \ \ 3 & ② \\ \ \ 3y-2z = \ \ 7 & ③ \qquad ③+②\times(-3) \end{cases}$$

$$(\mathrm{v})\quad \begin{cases} x-y+2z = -2 & ① \\ \ \ \ \ y-\ \ z = \ \ 3 & ② \\ \qquad\ \ z = -2 & ③ \end{cases}$$

したがって，$z=-2$ を ② に代入して $y=1$，さらにこれらを ① に代入して $x=3$ を得る．

上で用いた変形は次の 3 つである．

（Ｉ）　1 つの式を何倍か（$\neq 0$ 倍）する．

（II）　2 つの式を入れかえる．

（III）　1 つの式に他の式の何倍かを加える．

これら一連の変形はすべて可逆であるから，（ｉ），…，（ｖ）の連立 1 次方程式はすべて同等である．与えられた連立 1 次方程式に対して，（Ｉ），（II），（III）の変形を何回行っても解の集合は変わらない．

連立 1 次方程式（ｉ）がどのように（ｖ）まで変形されるかを，係数と右辺を並べてできる行列の推移で見れば，次のようである．

$$(\mathrm{i}):\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 11\\ 1 & -1 & 2 & -2\\ 1 & 2 & 0 & 5\end{pmatrix}\qquad(\mathrm{ii}):\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & -1 & 11\\ 1 & 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{iii}):\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 5 & -5 & 15\\ 0 & 3 & -2 & 7\end{pmatrix}\qquad(\mathrm{iv}):\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 3 & -2 & 7\end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{v}):\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

連立 1 次方程式における（Ｉ），（II），（III）の変形を行列から見れば，それぞれ

（Ｉ）　1 つの行を何倍か（$\neq 0$ 倍）する．

（II）　2 つの行を入れかえる．

（III）　1 つの行に他の行の何倍かを加える．

となる．これら 3 つの変形を行列の**基本変形**という．

行列 A に対して，何回かの基本変形を行って行列 B が得られるとき，

$$A \longrightarrow B$$

で表す．

いま（ｖ）の行列をさらに変形してみよう．

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{①}+\text{③}\times(-2)]{\text{②}+\text{③}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{①}+\text{②}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ただし，どのような変形を行ったかは連立1次方程式における変形と同じ書き方をする．たとえば，①＋③×(−2) は第1行に第3行の −2 倍を加える変形を表す．最後の行列を連立1次方程式で表せば

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

となる．

このようにして行列の基本変形を行って連立1次方程式を解く方法を**はき出し法**または**消去法**という．

次に，(m, n) 行列 $A=(a_{ij})$ に基本変形を行って得られる行列 B は A とどのような関係にあるかを見てみよう．

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots & & \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots\cdots & & \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots & & \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

であるから，A に基本変形

（Ⅰ）　第 i 行を c 倍する（$c \neq 0$）

を行って得られる行列は，m 次正方行列

$$P_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} i\,行$$

を A の左からかけたもの $P_i(c)A$ である．同様に，A に基本変形

（Ⅱ）　第 i 行と第 j 行を入れかえる（$i \neq j$）

を行って得られる行列は，m 次正方行列

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\,行 \\ \\ j\,行 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

を A の左からかけたもの $P_{ij}A$ である．A に基本変形

（Ⅲ）　第 i 行に第 j 行の c 倍を加える（$i \neq j$）

を行って得られる行列は，m 次正方行列

$$P_{ij}(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & \\ & & 1 & \cdots & c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad (i < j)$$

$$\text{または} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & c & \cdots & 1 & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ j\text{行} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad (i > j)$$

を A の左からかけたもの $P_{ij}(c)A$ である．

問1　基本変形（II),（III）に関してのこれらのことを確かめよ．

これら3種類の行列 $P_i(c)$, P_{ij}, $P_{ij}(c)$ を**基本行列**という．いずれも正則行列で，m 次単位行列 E に基本変形（I）,（II),（III）をそれぞれ行って得られる行列である．

問2　基本行列の行列式と逆行列をそれぞれ求めよ．

A に k 回の基本変形を続けて行って B が得られたとする．1つ1つの基本変形に対応する基本行列を $P_1, P_2, \cdots, P_k$ とすれば

$$B = P_k(\cdots(P_2(P_1A))\cdots) = (P_k\cdots P_2P_1)A$$

となり，$P = P_k\cdots P_2P_1$ は正則行列である．

このことから

定理 3.1

(m, n) 行列 A に基本変形を繰り返し行って行列 B が得られたとする．このとき，適当な m 次正則行列 P があって $B = PA$ とできる．

◈ 行列の階数 ◈

O でない行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

に基本変形を繰り返し行えば，下の行ほど左側に連続して並ぶ 0 の個数が増えていくような行列

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{1j_1} & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{2j_2} & & * & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & c_{rj_r} & \cdots \\ & & & O & & & & \end{pmatrix},$$

$$c_{1j_1}, c_{2j_2}, \cdots, c_{rj_r} \neq 0$$

に変形することができる．

実際，$a_{11} \neq 0$ のときはそのままにして，$a_{11} = 0$ のときは第 1 列の成分で 0 でない a_{k1} があれば，第 1 行と第 k 行を入れかえる（この a_{k1} を改めて a_{11} とする）．そこで，基本変形

$$\text{第 } i \text{ 行} + \text{第 } 1 \text{ 行} \times \left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right) \qquad (i = 2, 3, \cdots, m)$$

を行う．また，最初の j 列の成分がすべて 0 のときは，第 $j+1$ 列で同様な基本変形を行う．その結果，行列 A は

$$\left(\begin{array}{c|ccc} O & c_{1j_1} & \cdots \quad \cdots & c_{1n} \\ & 0 & & \\ & \vdots & A_1 & \\ & 0 & & \end{array}\right) \qquad (j_1 = j+1)$$

の形に変形される．次に，行列 A_1 について上と同様な変形を行う．これを繰り返せば B に変形される．

このような形をした行列を**階段行列**という．段の数 r を A の**階数**または**ランク**といい

$$r = \mathrm{rank}\, A$$

で表す．

また，零行列 O に対しては $\mathrm{rank}\, O = 0$ とする．

与えられた行列 A を階段行列 B に変形する仕方は1通りとは限らないが，どのような階段行列に変形しても，階数はすべて同じであることが証明できる．

明らかに (m, n) 行列 A に対して

$$\mathrm{rank}\, A \leqq m \qquad \text{および} \qquad \mathrm{rank}\, A \leqq n$$

が成り立つ．

例 1　$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

はいずれも階段行列である．階数は順に 1, 2, 3 である．

例題 3.1　$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ を階段行列に変形して，$\mathrm{rank}\, A$ を求めよ．

解答　$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{①と②の入れかえ}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\substack{②+①\times(-3)\\ ③+①\times 2}]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 5\\ 0 & -7 & 3 & -11\\ 0 & 7 & -3 & 10\end{pmatrix}\xrightarrow[③+②]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 5\\ 0 & -7 & 3 & -11\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

よって，rank $A=3$.

問 3　次の行列の階数を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}2 & 0 & -3 & 5\\ 0 & 1 & 4 & -1\\ 1 & 3 & -1 & 0\\ -1 & 7 & 2 & 3\end{pmatrix}$

定理 3.2

n 次正方行列 A に対して

$$A\text{ が正則行列} \Longleftrightarrow \operatorname{rank} A = n$$

証明　A は正則行列で rank $A=r<n$ とする．このとき，A は基本変形で階段行列

$$B=\begin{pmatrix} b_1 & & & & * \\ & b_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ O & & & b_r & \\ & & & & \end{pmatrix},\qquad b_1, b_2, \cdots, b_r \neq 0$$

に変形されるから，定理 3.1 から適当な正則行列 P により $B=PA$ と表される．右辺の PA は 2 つの正則行列の積であるから正則行列になる．ところが，B は $r<n$ より，少なくとも第 n 行の成分はすべて 0 となり正則行列ではない（例題 1.4 参照）．これは矛盾である．したがって，$r=n$ が成り立つ．

rank $A=n$ のとき，A は次の形の階段行列に変形される．

$$\begin{pmatrix} c_1 & & & * \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & c_n \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2, \cdots, c_n \neq 0$$

この行列の第 i 行を c_i^{-1} 倍することによって，行列

$$\begin{pmatrix} 1 & & * & d_1 \\ & 1 & & d_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & 1 \end{pmatrix}$$

を得る．次に，0 でない d_i に対して

$$\text{第 } i \text{ 行} + \text{第 } n \text{ 行} \times (-d_i), \qquad i = 2, 3, \cdots, n-1$$

を行うことにより

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & * & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ O & & & & 1 \end{pmatrix}$$

となる．そこで第 $n-1$ 列，第 $n-2$ 列，…，第2列までこの変形を続けると，n 次単位行列 E に達する．よって，n 次正則行列 P がとれて

$$PA = E$$

と書かれる．したがって，$A = P^{-1}$ は正則行列である．　▨

問4　任意の正則行列はいくつかの基本行列の積で表されることを示せ．

◈ 逆行列の計算 ◈

定理 3.2 の証明からもわかるように，正則行列 A に対して

$$PA = E$$

となる正則行列 P が存在して，$A^{-1} = P = PE$ が成り立つ．これは，A に何回かの基本変形を行って単位行列になるとすれば，これと完全に同じ基本変形

を n 次単位行列 E に行えば，その結果 A^{-1} が得られることを示している．

実際に逆行列 A^{-1} を計算するには，次の例題のように $(n, 2n)$ 行列 $(A \quad E)$ を変形すればよい．

例題 3.2　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ の逆行列を計算せよ．

解答

$$(A \quad E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}+\text{①}\times(-3)]{\text{②}+\text{①}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}+\text{②}\times(-2)]{\text{②}\times(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}\times(-1/4)]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{②}+\text{③}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{①}+\text{②}\times(-2)]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} = (E \quad A^{-1})$$

したがって，

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

注意　3 番目の行列の形から rank $A = 3$ になって，定理 3.2 より A は正則行列と

なることがわかるからさらに変形を続けることができる．途中で正則でないことがわかれば，そこで計算を打ち切る．

問5　次の行列が正則であるかどうかを判定し，正則ならば逆行列を求めよ．

（1）$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3.2　連立1次方程式

◈一般の連立1次方程式◈

未知数の個数と方程式の個数が等しい連立1次方程式の行列式を用いた解法は，すでに2.2節で学んだ（クラメールの公式）．ここでは，n 個の未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する m 個の式からなる一般の連立1次方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

を考える．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおけば，連立1次方程式（＊）は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表される．このときの行列 A を連立1次方程式（＊）の**係数行列**という．また，

$$(A \quad \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdots\cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

を（＊）の**拡大係数行列**という．

3.1 節のはじめで具体的に扱ったように，はき出し法で連立１次方程式（＊）を解くことにしよう．拡大係数行列 $(A \quad \boldsymbol{b})$ を基本変形を用いて，階段行列に変形する：

$$(A \quad \boldsymbol{b}) \longrightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & & & & d_1 \\ & c_{2j_2} & & * & d_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & c_{rj_r} & d_r \\ & O & & & d_{r+1} \\ & & & & \end{pmatrix} = (C \quad \boldsymbol{d})$$

$$c_{11},\ c_{2j_2},\ \cdots,\ c_{rj_r} \neq 0$$

連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ は同値である．すなわち，これら２つの方程式の解の集合は一致する．

そこで，階段行列 $(C \quad \boldsymbol{d})$ に対応する連立方程式は次のようになる：

$$(\#) \qquad \begin{cases} c_{11}x_1 + \quad \cdots \quad + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{2j_2}x_{j_2} + \quad \cdots \quad + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1} \end{cases}$$

$\mathrm{rank}\,(A \quad \boldsymbol{b}) > \mathrm{rank}\,A = r$ のときは，$d_{r+1} \neq 0$ であるから（＃）は解をもたない．$\mathrm{rank}\,(A \quad \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}\,A$ のときは，$d_{r+1} = 0$ である．このとき，$x_1, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$ 以外の $n-r$ 個の未知数を任意定数 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-r}$ でおきかえる．（＃）の r 番目の式から x_{j_r} が求まり，これをその上の $r-1$ 番目の式に代入して，$x_{j_{r-1}}$ を求める．これを順に１番目の式まで続けていけば，すべての未知数は $t_1, t_2, \cdots, t_{n-r}$ を使って表すことができる．

とくに階段行列 $(C \quad \boldsymbol{d})$ が

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & & & d_1 \\ & c_{22} & \cdots & & & d_2 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ O & & & c_{rr} & \cdots & d_r \\ & & & & & \end{pmatrix}, \qquad c_{11}, c_{22}, \cdots, c_{rr} \neq 0$$

の形のとき，(#) は

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \quad \cdots \quad + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \quad \cdots \quad + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad \qquad \cdots\cdots \\ \qquad \qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \end{cases}$$

となる．このときは $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ を任意定数 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-r}$ でおきかえれば，それに応じて $x_1, x_2, \cdots, x_r$ が定まる．

任意定数の個数 $n-r$ を解の**自由度**という．また，$n-r$ 個の任意定数を含む解を連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の**一般解**といい，任意定数に特別な数を代入した解を**特殊解**という．

以上のことから次の定理が得られる．

定理 3.3

A を (m, n) 行列とする．n 個の未知数からなる連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\,(A \quad \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}\,A$$

が成り立つことである．このとき，一般解は $n-\mathrm{rank}\,A$ 個の任意定数を含んだ形で表される．

問6　定理3.3の連立1次方程式がただ1組の解をもつための条件を求めよ．

例題 3.3　次の連立1次方程式を解け．

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 8x_4 + 7x_5 = -8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 7x_5 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 10x_5 = -8 \end{cases}$$

解答　$(A \quad \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 & -5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -8 & 7 & -8 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -7 & -4 \\ 3 & -2 & 2 & 3 & -10 & -8 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{③+①×(−2), ④+①×(−3)}]{\text{②+①}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & -2 & 5 & -12 & 5 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{④+②×2}]{\text{③+②}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 9 & -18 & 9 & -27 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{④+③×(−9/5)}]{\text{③×1/5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank $(A \quad \boldsymbol{b})$ = rank $A = 3$ であるから，この方程式は自由度 2 の解をもち

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 3 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = -5 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 = -3 \end{cases}$$

に同値である．$x_4 = c_1$，$x_5 = c_2$ とおくと第 3 の式より $x_3 = 2c_1 - c_2 - 3$．したがって，第 2，第 1 の式より，$x_2 = -c_1 + 1$，$x_1 = -3c_1 + 4c_2$ となり，解は次のように表される．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1,\ c_2 \text{ は任意定数})$$

注意　基本変形をさらに続ければ，次の形にできる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{①+③ \\ ②+③\times(-2)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ \quad x_2 \qquad + x_4 \qquad\ = 1 \\ \qquad x_3 - 2x_4 + x_5 = -3 \end{cases}$$

から，解を求めてもよい．

拡大係数行列を $\begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形できるときは，このような形にしたほうが解は求めやすい．ただし，行列によってはこの形に変形できないこともある（次の例題 3.4 を参照）．

また，解の表示の仕方は1通りではない．上の例では，$x_1 = c_1$，$x_2 = c_2$ とおいて，x_3, x_4, x_5 を c_1, c_2 で表してもよい．

なお，任意定数は例題 3.3 と同様に，以後 $c_1, c_2, \cdots$ で表すことにする．

例題 3.4　次の連立1次方程式が解をもつように a の値を定めて，これを解け．

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 15x_4 = 10 \\ 2x_1 - 4x_2 + 11x_3 + 8x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 4x_4 = a \end{cases}$$

解答　$(A \quad \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & -3 & 15 & 10 \\ 2 & -4 & 11 & 8 & 0 \\ 1 & 7 & -8 & 4 & a \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{③}+\text{①}\times(-2),\ \text{④}+\text{①}\times(-1)]{\text{②}+\text{①}\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & -5 \\ 0 & -10 & 15 & 0 & -10 \\ 0 & 4 & -6 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{③}+\text{②}\times(-5),\ \text{④}+\text{②}\times 2]{\text{②}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & a-15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{④}+\text{③}\times 2/5]{\text{③}\times(-1/15)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-9 \end{pmatrix}$$

から rank $(A \quad \boldsymbol{b})$ = rank A であるためには $a = 9$．このとき，与えられた連立1次方程式は

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ \qquad 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 5 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_4 = -1 \end{cases}$$

と同値である．そこで，$x_3 = 2c$ とおくと $x_2 = 3c + 1$，$x_1 = -5c + 6$．

したがって，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (c \text{ は任意定数})$$

問7　次の連立1次方程式を解け．

（1）$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=5 \end{cases}$　（2）$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=-4 \\ x_1+2x_2+5x_3+5x_4=6 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2 \\ 2x_1-3x_2-3x_3=7 \\ -3x_1+x_2+2x_3=-9 \\ 4x_1+x_2-x_3=11 \end{cases}$

（4）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

問8　次の連立1次方程式が解をもつ条件を求めて，これを解け．

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

◈同次連立1次方程式◈

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の形で表される連立1次方程式，すなわち

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

を**同次連立1次方程式**という．$\text{rank}\,(A\quad\boldsymbol{o})=\text{rank}\,A$ であるから，この連立方程式は必ず解をもつ．実際，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ は解である．

この解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ を**自明解**といい，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}$ となる解 $\boldsymbol{x}$ を**非自明解**という．

定理3.3から $n-\text{rank}\,A>0$ ならば，解は少なくとも1つ以上の任意定数を含んだ形で表されるから $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 以外の解をもつ．逆に，$\boldsymbol{o}$ でない解 $\boldsymbol{x}$ をもてば，それは1つ以上の任意定数を用いて表される．

したがって

定理 3.4

A を (m, n) 行列とする．n 個の未知数からなる同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ に対して

（1）　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が非自明解をもつ　$\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rank} A < n$

（2）　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が自明解のみをもつ $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rank} A = n$.

$m < n$ ならば，$\operatorname{rank} A \leqq m$ であるから $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ は非自明解をもつ．

とくに，未知数と方程式がともに n 個である同次連立 1 次方程式に関しては，定理 2.13 と定理 3.2 から次が成り立つ．

定理 3.5

A を n 次正方行列とするとき，次はすべて同値である．

（1）　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ は非自明解をもつ

（2）　$\operatorname{rank} A < n$

（3）　A は正則行列でない

（4）　$|A| = 0$.

次の定理は定理 3.5 の対偶である．

定理 3.6

A を n 次正方行列とするとき，次はすべて同値である．

（1）　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解は自明解のみである

（2）　$\operatorname{rank} A = n$

（3）　A は正則行列

（4）　$|A| \neq 0$.

例 2　連立 1 次方程式 $\begin{cases} mx \quad\quad\quad +2y = 0 \\ x+(m-1)y = 0 \end{cases}$ は $\begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)(m-2)$ より $m \neq -1, 2$ のときは自明解 $x = y = 0$ だけをもつ．$m = -1$ のときは $x-2y = 0$ より非自明解 $x = 2c$，$y = c$ をもち，$m = 2$ のときは $x+y =$

0 より非自明解 $x=c$，$y=-c$ をもつ．

例題 3.5　次の同次連立1次方程式が非自明解をもつかどうかを調べて，これを解け．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -6 & 5 & 8 \\ 1 & 8 & -5 & 6 \\ 4 & -1 & 2 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

解答

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -6 & 5 & 8 \\ 1 & 8 & -5 & 6 \\ 4 & -1 & 2 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③+①×(−1), ④+①×(−4)}]{\text{②+①×(−3)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -12 & 8 & -4 \\ 0 & 6 & -4 & 2 \\ 0 & -9 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③×1/2, ④×(−1/3)}]{\text{②×(−1/4)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{③+②×(−1)}\atop\text{④+②×(−1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$n-\mathrm{rank}\,A=4-2=2$ より，与えられた方程式は自由度が2の非自明解をもつ．

$$\begin{cases} x_1+2x_2-\ x_3+4x_4=0 \\ \qquad 3x_2-2x_3+\ x_4=0 \end{cases}$$

から $x_2=c_1$，$x_3=c_2$ とおけば $x_4=-3c_1+2c_2$，$x_1=10c_1-7c_2$．

したがって

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10c_1-7c_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ -3c_1+2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} c_2$$

（c_1, c_2 は任意定数）

同次連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の一般解が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の $n-r$ 個の解 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ と任意定数により

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{x}_{n-r}$$

と表されるとき，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の**基本解**という．基本解のとり方は一意的ではない．

例題3.5では $\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が（1組の）基本解である．

問9　次の同次連立1次方程式が非自明解をもつように a の値を定めよ．

（1）$\begin{cases} ax+2y = 3x \\ 3x+ay = -2y \end{cases}$　　（2）$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

問10　次の同次連立1次方程式の基本解を求めよ．

（1）$x_1+2x_2+3x_3 = 0$　　（2）$\begin{cases} x_1+2x_2-\ 3x_3 = 0 \\ 3x_1+7x_2-13x_3+2x_4 = 0 \\ 5x_1+6x_2-\ 2x_3-2x_4 = 0 \end{cases}$

例題3.6　連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつとき，一般解 $\boldsymbol{x}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の1つの特殊解 $\boldsymbol{x}_0$ と同次連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の一般解 $\boldsymbol{x}'$ の和 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}'$ で表されることを示せ．

解答　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解 $\boldsymbol{x}$ と1つの特殊解 $\boldsymbol{x}_0$ に対して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，$A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$ であるから，$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ とおけば

$$A\boldsymbol{x}' = A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}.$$

したがって，$\boldsymbol{x}'$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解になる．

逆に，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の1つの特殊解を $\boldsymbol{x}_0$，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の一般解を $\boldsymbol{x}'$ とすれば

$$A(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}')=A\boldsymbol{x}_0+A\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{b}$$

であるから，$\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}'$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解である．

問11　例題3.3の方程式で右辺をすべて0としたときの同次連立1次方程式を解いて，例題3.6を確かめよ．

例題3.7　平面上の3直線

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$$

が1点で交わるか，または平行であるための必要十分条件は

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

で表されることを示せ．

解答　これらの3直線が1点 (x_0, y_0) で交われば，x, y, z を未知数とする同次連立1次方程式

$$(3)\qquad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

は非自明解 $(x_0, y_0, 1)$ をもつから，定理3.5から(2)が成り立つ．また，3直線が平行であれば

$$a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3.$$

この比の値を k と書けば，(2)の左辺の第1列が第2列の k 倍になる．すなわち，(2)が成り立つ．

逆に，(2)が成り立てば(3)は非自明解 (x_0, y_0, z_0) をもつ．したがって，$z_0 \neq 0$ のとき，

$$a_i \frac{x_0}{z_0} + b_i \frac{y_0}{z_0} + c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

が成り立つから（1）は点$\left(\dfrac{x_0}{z_0}, \dfrac{y_0}{z_0}\right)$で交わる．また，$z_0 = 0$ のとき，

$$a_i x_0 + b_i y_0 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

より $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = -y_0 : x_0$ となり，3 直線は平行である．

問 12　平面上の異なる 2 点 $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ を通る直線の方程式は，次で与えられることを示せ．

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

問 13　平面上の 3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ が同一直線上にあるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

となることを示せ．

練 習 問 題 3

[A]

1.　次の行列の階数を求めよ．

（1）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i \\ -i & 0 & 2+i \\ i & 1 & -1+i \end{pmatrix}$　　（4）$\begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \\ -1 & 7 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

（5）$\begin{pmatrix} i & 1 & -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & -1 & i & 0 \\ -i & 0 & i & 0 & -i \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. 基本変形により次の行列の逆行列を求めよ．

（1）$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$　$(\omega^3 = 1,\ \omega \neq 1)$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 1 & 0 \\ 1/8 & 3/4 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$

3. 次の連立1次方程式を解け．

（1）$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 5 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 0.002x_1 + 0.001x_2 = 1 \\ 0.002x_2 + 0.001x_3 = 2 \\ 0.001x_1 + 0.002x_3 = 3 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 13x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} 99x_1 + 101x_2 + 102x_3 = 0 \\ 100x_1 + 102x_2 + 101x_3 = 0 \\ 101x_1 + 103x_2 + 100x_3 = 0 \end{cases}$

（5）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & -7 & 10 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

（6）$\begin{cases} ix_1 + x_3 - ix_4 = 0 \\ x_1 + ix_2 - ix_3 = 0 \\ -ix_2 + x_3 - ix_4 = 0 \end{cases}$

4. 次の連立1次方程式を解け．

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ x_2 + x_3 + x_4 = b \\ x_3 + x_4 = c \\ x_1 + x_5 = d \\ x_1 + x_2 + x_5 = e \end{cases}$$

5. 次の連立1次方程式が解をもつように a, b, c を定めて，これを解け．

（1）$\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 3x + (a+2)y = -9 \\ ax + y = -1 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 = b \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 9x_4 = c \end{cases}$

6. 連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = a \\ x + 2y - 3z = b \\ 3x - y + 2z = c \end{cases}$$

が少なくとも 1 つの解をもつための a, b, c についての条件を求めよ.

7. 正則行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ を基本行列の積で表せ.

8. 次の 3 直線が 1 点で交わるように a の値を定めよ.

$$\begin{cases} x+(a+1)y = 3 \\ -2x+(a-2)y = -2a+1 \\ 4x+(a+4)y = a+3 \end{cases}$$

9. 空間の 1 直線上にない 3 点 $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)$ を通る平面の方程式は, 次で与えられることを示せ.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

10. 空間にある 4 点 (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ が同一平面上にあるための条件を求めよ.

[B]

1. 次の行列の階数を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} a & a-1 & a-1 & 1 & a+1 \\ 2 & a-1 & 1 & 1 & a+1 \\ 3 & 1 & a & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & a-1 & 2a-1 \end{pmatrix}$

2. 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2x & x^2 \\ 1 & 3x & 3x^2 & x^3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} & O & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & O \\ 1 & & & \end{pmatrix}$ (n 次)

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & O \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ O & & & & 1 \end{pmatrix}$ (n 次)

3. a, b, c を 0 でない実数とするとき，次の連立1次方程式を解け．

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3 = a \\ bx_1+cx_2+ax_3 = b \\ cx_1+ax_2+bx_3 = c \end{cases}$$

4. 次の同次連立1次方程式が非自明解をもつように a の値を定めよ．

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1+(1-a)x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2+(2-a)x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + (3-a)x_4 = 0 \end{cases}$$

5. 行についての基本変形と同様に列についての基本変形

（Ｉ）　1つの列を何倍か（≠0倍）する

（II）　2つの列を入れかえる

（III）　1つの列に他の列の何倍かを加える

がある．これらの変形を (m, n) 行列 A に行って得られる行列は，n 次単位行列を行の場合と同様に変形した行列である基本行列を右からかけたものになる．このことを示せ．また，A は行および列の基本変形により

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \qquad r = \text{rank}\, A$$

の形に変形されることを示せ．

したがって，(m, n) 行列 A は適当な m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q によって

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \qquad r = \text{rank}\, A$$

と表される．練習問題 3[A]1 の 5 つの行列をこの形に変形せよ．

6. $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ のとき，$\text{rank}\, A = \text{rank}\, A_1 + \text{rank}\, A_2$ を示せ．

7. $\text{rank}\, {}^tA = \text{rank}\, A$ が成り立つことを証明せよ．

4

線形空間

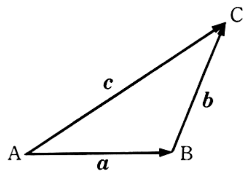
4.1 幾何ベクトル

◈平面ベクトルと空間ベクトル◈

平面または空間において，点Aから点Bに向かう有向線分ABを，Aを**始点**，Bを**終点**とする**ベクトル**といい，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表す．線分ABの長さをベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**大きさ**または**長さ**といい，$\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$ で表す．長さが1のベクトルは**単位ベクトル**と呼ばれる．

2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ について，向きも考えて $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を平行移動して $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ に完全に重ね合わせることができるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ とは**等しい**という．平面または空間でのこのようなベクトルをそれぞれ**平面ベクトル**または**空間ベクトル**といい，あわせて**幾何ベクトル**という．以下では，幾何ベクトルを記号 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \cdots, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ などで表す．ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に対して向きが反対のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を $-\boldsymbol{a}$ で表し，$\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**という．また，始点と終点の一致するベクトル，すなわち長さが0のベクトルを**零ベクトル**といい，$\boldsymbol{o}$ で表す．

2つのベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**和**といい，$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ と書く．また，$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ で表し，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ の**差**という．



ベクトル $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ と実数 m に対して，$m\boldsymbol{a}$ を

$m > 0$ のとき，向きは $\boldsymbol{a}$ と同じで，長さは $\boldsymbol{a}$ の m 倍のベクトル

$m < 0$ のとき，向きは $\boldsymbol{a}$ と反対で，長さは $\boldsymbol{a}$ の $-m$ 倍のベクトル

$m = 0$ のとき，零ベクトル $\boldsymbol{o}$

で定める．また，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ のときは，任意の m について，$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ と定める．この $m\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a}$ の**スカラー倍**という．とくに，$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ である．

幾何ベクトルの和とスカラー倍の2つの演算に関しては，次の基本法則が自然に成り立つ．

ベクトルの和について

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}.$$

ベクトルのスカラー倍について

$$m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$$

$$(m+n)\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}$$

$$m(n\boldsymbol{a}) = (mn)\boldsymbol{a}.$$

平面または空間にOを原点とする直交座標軸を設定する．以下では空間の場合を考えるが，平面の場合も同様である．x 軸，y 軸，z 軸上でOを始点とする正の向きをもつ単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ と書き，**基本ベクトル**という．

Oを始点とするベクトル $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を点Pの**位置ベクトル**という．点Pの座標を (x_1, x_2, x_3) とすれば

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$$

と表される．x_1, x_2, x_3 をベクトル $\boldsymbol{x}$ の x **成分**，y **成分**，z **成分**という．これらの成分を縦に並べて

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と書き，$\boldsymbol{x}$ の**成分表示**という．基本ベクトルは

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で表される.

注意 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は物理学，工学などにおいては，しばしばこの順に $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ と書かれる.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{とすれば}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \iff a_1 = b_1, \ a_2 = b_2, \ a_3 = b_3$$

であり，ベクトルの和とスカラー倍は，次のようになる：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}, \qquad m\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ma_1 \\ ma_2 \\ ma_3 \end{pmatrix}.$$

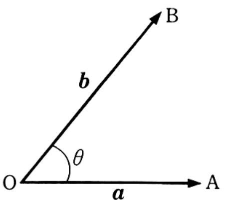
◈内　積◈

$\boldsymbol{o}$ でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ に対して，$\theta = \angle\mathrm{AOB}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**なす角**という．とくに $\theta = \pi/2$ のとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する**といい，$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ と書く.

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角が θ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$$

で定義する．また，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の少なくとも一方が $\boldsymbol{o}$ のときは，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ と定める．このとき，



$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{a}\|^2 \geqq 0$$

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$$

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} \qquad (1 \leqq i \leqq 3, \ 1 \leqq j \leqq 3)$$

が成り立つ.

ベクトルの内積については，次の基本法則が成り立つ.

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

$$(m\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = m(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\ m\boldsymbol{b}).$$

問1　次の等式または不等式を証明せよ．

（1）　$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2)$

（2）　$|(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$

（3）　$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$のとき

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) &= (a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3,\ b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_ib_j(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j) = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\end{aligned}$$

であるから，次が成り立つ．

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$$

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすれば，

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}}.$$

例1　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$のとき，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = 3\cdot2+0\cdot(-1)+(-1)\cdot6 = 0$

であるから，$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$．また，$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{10}$，$\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{41}$．

問2　空間ベクトル $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ について，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$, $\|\boldsymbol{a}\|$, $\|\boldsymbol{b}\|$, $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|$, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ，および $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交する単位ベクトルを求めよ．

問3　空間の1点 P_0 を通り，$\boldsymbol{o}$ でないベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直な平面の方程式は，P_0 の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}_0$，平面上の任意の点Pの位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とするとき，

$$(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0,\ \boldsymbol{n}) = 0$$

で与えられることを示せ．

◈外　積◈

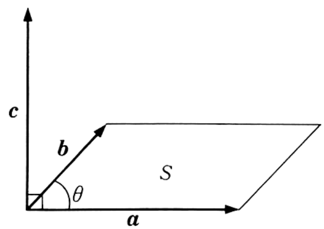
$\boldsymbol{o}$ でない 2 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が平行でないとき，次の 3 つの条件を満たす第 3 のベクトル $\boldsymbol{c}$ がただ 1 つ定まる．

（1）　$\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$

（2）　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の向きはこの順序で右手の親ゆび，人さしゆび，中ゆびが向く方向に一致する

（3）　$\boldsymbol{c}$ の長さは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる平行 4 辺形の面積 S に等しい．すなわち $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすれば

$$\|\boldsymbol{c}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta.$$



この $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積**または**ベクトル積**といい，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と書く．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の少なくとも一方が $\boldsymbol{o}$ のときか，または $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角が 0 か π であれば，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ と定める．

外積については，次の基本法則が成り立つ．

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$$
$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$
$$(m\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = m(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times(m\boldsymbol{b}).$$

問 4　次の等式を示せ．

（1）　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0$　　　（2）　$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix}$

次に，外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の成分表示を考える．

定理 4.1

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ とすれば，} \quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

証明　基本ベクトルについて

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3,\qquad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1,\qquad \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{o}\qquad (i=1,2,3)$$

であるから，外積の基本法則により

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\times(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3)\\&=a_1b_1(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1)+a_1b_2(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)+a_1b_3(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3)\\&\quad+a_2b_1(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1)+a_2b_2(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2)+a_2b_3(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)\\&\quad+a_3b_1(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1)+a_3b_2(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2)+a_3b_3(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_3)\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$ ▩

注意　外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を形式的に次の形に書くと記憶しやすい．

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1&a_1&b_1\\\boldsymbol{e}_2&a_2&b_2\\\boldsymbol{e}_3&a_3&b_3\end{vmatrix}\qquad\text{（第 1 列の展開）}$$
$$=\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1-\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_3&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2+\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3$$

例 2　$\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_1+6\boldsymbol{e}_3$ のとき，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1&5&1\\\boldsymbol{e}_2&-2&4\\\boldsymbol{e}_3&3&-1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\8\\22\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1&-10&1\\\boldsymbol{e}_2&8&0\\\boldsymbol{e}_3&22&6\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}48\\82\\-8\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1&1&1\\\boldsymbol{e}_2&4&0\\\boldsymbol{e}_3&-1&6\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}24\\-7\\-4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1&5&24\\\boldsymbol{e}_2&-2&-7\\\boldsymbol{e}_3&3&-4\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}29\\92\\13\end{pmatrix}.$$

例 2 より，外積では一般に結合法則 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は成り立たな

いことがわかる．

例題 4.1　空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して，次が成り立つことを示せ．

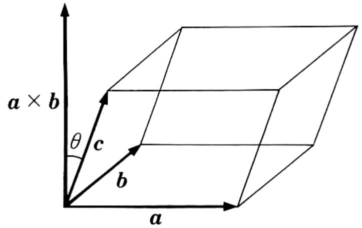
（1）
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

（2）　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の定める平行 6 面体の体積 V は（1）での値の絶対値で与えられる：
$$V = |\det(\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c})|.$$

解答　（1）　成分で計算すると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= (a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3 \\ &= c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{（第 3 列の展開）} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

（2）　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のつくる平行 4 辺形を底面と見て，この面に垂直な直線と $\boldsymbol{c}$ とのなす角を θ とする．平行 6 面体の高さは $\|\boldsymbol{c}\||\cos\theta|$ で底面積は $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ である．よって，



$$\begin{aligned}V &= \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\||\cos\theta| \\ &= |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})| = |\det(\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c})|.\end{aligned}$$

問 5　ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して，次を示せ．

（1）　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

（2）　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$

例題 4.2　xy 平面上の 3 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1), \mathrm{B}(x_2, y_2), \mathrm{C}(x_3, y_3)$ を頂点とする 3 角形の面積 S は

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

の絶対値で与えられることを示せ．

解答　点 A などを $A(x_1, y_1, 0)$ のように空間内の点と見る．このとき，$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$ とすれば，$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = 2S$ である．

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ \boldsymbol{e}_2 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ \boldsymbol{e}_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3$$

より，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の z 成分の絶対値は $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ になる．

一方，

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{第 2 列} - \text{第 1 列} \\ \text{第 3 列} - \text{第 1 列}}}{=} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

であるから，証明が完了する．

問 6　$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC} = 6\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3$ のとき，O, A, B, C を頂点とする 4 面体の体積を求めよ．

問 7　2 つの異なるベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の終点を通る直線の方程式は

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$$

で表されることを示せ．

4.2　線　形　空　間

◈線形空間◈

幾何ベクトルの全体には，ベクトルの和とスカラー倍が定義され，いくつかの基本法則が成り立った．これからは，このように和とスカラー倍が自由自在にできる集合について考える．

いま，空でない集合 V において

（和）　任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V$

（スカラー倍）　任意の $\boldsymbol{a} \in V$ と任意の実数または複素数 c に対して，$c\boldsymbol{a} \in V$

であって，これらの2つの演算に関する次のIおよびIIの自然な演算法則が成り立つとき，V を**線形空間**または**ベクトル空間**という．このとき，V の元を**ベクトル**，実数または複素数である c などを**スカラー**という．

和について

I．（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$　交換法則

（2）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$　結合法則

（3）任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対して，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ を満たす特別な V の元 $\boldsymbol{o} \in V$ が存在する（この $\boldsymbol{o}$ を V の**零ベクトル**という）．

（4）任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対して，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ を満たす特別な V の元 $\boldsymbol{a}' \in V$ が存在する（この $\boldsymbol{a}'$ を $\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\boldsymbol{a}$ で表す）．

スカラー倍について

II．（1）$c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b}$　分配法則

（2）$(c+d)\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{a}$　分配法則

（3）$(cd)\boldsymbol{a} = c(d\boldsymbol{a})$

（4）$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

注意　スカラーを実数にとるときは，V を**実線形空間**，スカラーを複素数にとるときは，V を**複素線形空間**と呼ぶ．また，第1章と同じく実数全体からなる集合，複素数全体からなる集合をそれぞれ $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ で表す．

今後，とくに断らない限り線形空間というときは，実線形空間だけを考えれば十分である．ただし，第7章では複素線形空間を中心に取り扱う．

問8　I．(3),(4)の零ベクトル $\boldsymbol{o}$，$\boldsymbol{a}$ の逆ベクトル $\boldsymbol{a}'$ はそれぞれただ1つ存在することを示せ．

問9　線形空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ とスカラー c に対して，次を示せ．

（1）$0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$　（2）$c\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$　（3）$(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$

◈線形空間の例◈

代表的な線形空間の例をいくつかあげる．

例 3　幾何ベクトルの全体からなる集合は 4.1 節で定義されたベクトルの和とスカラー倍により線形空間になる．

例 4　実数を成分とする n 項列ベクトルの全体を $\boldsymbol{R}^n$ と書く：

$$\boldsymbol{R}^n=\left\{\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\middle|\ a_1,a_2,\cdots,a_n\in\boldsymbol{R}\right\}.$$

このとき，行列としての和およびスカラー倍

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix},\quad c\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ca_1\\ca_2\\\vdots\\ca_n\end{pmatrix}\quad(c\in\boldsymbol{R})$$

により，$\boldsymbol{R}^n$ は線形空間になる．零ベクトル $\boldsymbol{o}$ は $\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ である．

例 5　実数を成分とする n 項行ベクトルの全体

$$\boldsymbol{R}_n=\{\boldsymbol{a}=(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n)\mid a_1,a_2,\cdots,a_n\in\boldsymbol{R}\}$$

も例 4 と同様に，行列としての和およびスカラー倍に関して線形空間になる．

例 6　m 行 n 列の実行列全体の集合 $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ は，行列の和とスカラー倍に関して，定理 1.7 からわかるように線形空間になる．

例 7　例 4，例 5，例 6 のいずれにおいても，複素数を成分にもつ集合 $\boldsymbol{C}^n$, $\boldsymbol{C}_n$, $M_{m,n}(\boldsymbol{C})$ を考えれば，実数の場合と同じ演算で複素線形空間になる．$\boldsymbol{R}^n$,

$\boldsymbol{R}_n$, $\boldsymbol{C}^n$, $\boldsymbol{C}_n$ は**数ベクトル空間**と呼ばれることもある．この本では，数ベクトル空間としては $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}^n$ を扱う．

例 8 実数を係数とする n 次以下の x の多項式 $f(x)$ の全体は，通常の多項式の和と定数倍により線形空間になる．

例 9 区間 $I = [a, b]$ で連続な実数値関数の全体 $C(I)$ は，関数の和と定数倍により線形空間になる．

注意 $\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{R}^3$ の元を幾何ベクトルの成分表示と考えれば，$\boldsymbol{R}^2$ および $\boldsymbol{R}^3$ はそれぞれ平面ベクトルの全体および空間ベクトルの全体からなる線形空間とみなせる．

問 10 整数全体からなる集合は線形空間になるか．

◈ 部分空間 ◈

線形空間 V の空でない部分集合 W が V と同じ和とスカラー倍で線形空間になるとき，W を V の**部分空間**という．

$W = \{\boldsymbol{o}\}$ も V の部分空間になる．

この定義から，V の空でない部分集合 W が V の部分空間であるためには，次の 2 つの条件が成り立つことが必要十分である．

（1） 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ に対して，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W$

（2） 任意の $\boldsymbol{a} \in W$ と任意のスカラー c に対して，$c\boldsymbol{a} \in W$．

問 11 このことを示せ．

例 10 平面ベクトル全体からなる集合は，自然に空間ベクトルの全体からなる線形空間の部分空間と見ることができる．

例 11 W_1, W_2 が V の部分空間のとき

$$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \mid \boldsymbol{w}_1 \in W_1,\ \ \boldsymbol{w}_2 \in W_2\}$$

は V の部分空間である．

実際，W_1+W_2 の 2 つの元 $\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_1'+\boldsymbol{w}_2'$ とスカラー c をとれば，

$$(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)+(\boldsymbol{w}_1'+\boldsymbol{w}_2') = (\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_1')+(\boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{w}_2') \in W_1+W_2$$
$$c(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2) = c\boldsymbol{w}_1+c\boldsymbol{w}_2 \in W_1+W_2$$

により，(1) と (2) は成り立つ.

この部分空間 W_1+W_2 を W_1 と W_2 の**和空間**という.

問 12　W_1, W_2 を V の部分空間とするとき，共通部分 $W_1\cap W_2$ も V の部分空間になることを示せ.

問 13　$\boldsymbol{R}^2$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではないことを説明して，例 10 と比較せよ.

例題 4.3　$\boldsymbol{R}^3$ の部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1+x_2-x_3 = 0 \right\}$$

は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間であることを示せ.

解答　任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in W$ をとれば，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$ であるから

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)-(x_3+y_3) = (x_1+x_2-x_3)+(y_1+y_2-y_3)$$
$$= 0+0 = 0.$$

よって，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W$.

任意の $\boldsymbol{x} \in W$ と実数 c をとれば，$c\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ cx_3 \end{pmatrix}$ であるから

$$cx_1+cx_2-cx_3 = c(x_1+x_2-x_3) = c0 = 0.$$

よって，$c\boldsymbol{x} \in W$.

したがって，W は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間になる.

例題 4.3 を $\boldsymbol{R}^n$ で考えれば，次の定理が成り立つ．

定理 4.2

(m, n) 行列 A に対して，$W = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間である．

証明　任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ をとれば

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$$

により $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W$.

次に，任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}$，$c \in \boldsymbol{R}$ をとれば

$$A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$$

により，$c\boldsymbol{x} \in W$.

したがって，W は $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間である．■

定理 4.2 は同次連立 1 次方程式の解の全体 W は $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間になることを示している．この W を連立 1 次方程式の**解空間**という．$A = (1 \quad 1 \quad -1)$ の場合が例題 4.3 である．

問 14　$S = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1+x_2 = 1\right\}$，$T = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| 0 \leqq x_1 \leqq 1,\ x_2 \in \boldsymbol{R}\right\}$ はいずれも $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間にはならない．なぜか．

問 15　2 次の行列全体からなる線形空間 M_2 において，次の部分集合 W は M_2 の部分空間になるか．

（1）　$W = \{A \mid A$ は正則行列$\}$　　（2）　$W = \{A \mid A^2 = O\}$

◈ 1 次結合 ◈

線形空間 V の r 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ のスカラー倍の和

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r$$

を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の **1 次結合**（または**線形結合**）という．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合の全体を $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ で表す．すなわち，スカラーを実数にとれば

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \rangle = \{c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r \mid c_1, c_2, \cdots, c_r \in \boldsymbol{R}\}.$$

この集合 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ は V の部分空間になる．これを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が**生成する部分空間**，または $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ で**張られる部分空間**という．

問 16　$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ は V の部分空間になることを示せ．

例 12　$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ を用いれば，$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と表されるから，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の 1 次結合で書ける．すなわち

$$\boldsymbol{R}^n = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle.$$

ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の**基本ベクトル**という．

問 17　$\boldsymbol{C}^n$ の場合も同じ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を用いて，$\boldsymbol{C}^n = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ と表されることを示せ．

例 13　例題 4.3 の $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ について，$x_1 + x_2 - x_3 = 0$ の解は $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2$ で表されるから，

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

問 18　$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ k \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ の 1 次結合で書けるとき k の値を定めよ．

問 19　行列 $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ を行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の 1 次結合で表せ．

◈ 1 次独立と 1 次従属 ◈

$c_1, c_2, \cdots, c_r$ をスカラーとする．線形空間 V の r 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ に対して，1 次関係式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$$

が成り立つのは $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ に限るとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は **1 次独立**であるという．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立でないとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は **1 次従属**であるという．すなわち，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次従属であるとは，$c_1, c_2, \cdots, c_r$ の中で少なくとも 1 つ 0 でないものがあって $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$ とできるときである．

例 14　$\boldsymbol{R}^n$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は 1 次独立である．

実際，$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{o}$ とすれば，$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ となるからである．

例 15　$\boldsymbol{C}^2$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ は $i\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ であるから 1 次従属である．

例 16　例 9 において，関数 $1, e^x, e^{2x}$ は 1 次独立である．

実際，$c_1 1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} = 0$ とするとき，この両辺を微分すれば，$e^x \neq 0$

であるから，$c_2+2c_3e^x=0$．もう一度微分すれば，$c_3=0$ を得る．したがって，$c_2=0$ および $c_1=0$．

問 20　1つのベクトル $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$ のときに限って1次独立であることを示せ．

問 21　V のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ のうち1つが零ベクトルであれば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は1次従属である．このことを示せ．

例題 4.4　$\boldsymbol{R}^4$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\7\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}3\\1\\0\\2\end{pmatrix}$$

に対して，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は1次独立であり，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は1次従属であることを示せ．

解答　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ が1次独立であることを示すために

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_4\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{o}$$

とする．このとき，同次連立1次方程式

$$\begin{cases} c_1+4c_2+3c_4=0\\ -c_1-2c_2+\ \ c_4=0\\ 4c_1+7c_2\qquad\ \ =0\\ \qquad\quad c_2+2c_4=0\end{cases}$$

が自明解のみをもてばよい．係数行列 $A=(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_4)$ の階数は以下の基本変形により3である．よって，定理3.4により $A\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$ は自明解 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$ だけをもつ．すなわち，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は1次独立である．

$$\begin{pmatrix}1&4&3\\-1&-2&1\\4&7&0\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{③}+\text{①}\times(-4)]{\text{②}+\text{①}}\begin{pmatrix}1&4&3\\0&2&4\\0&-9&-12\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{③}\times(-1/3)]{\text{②}\times(1/2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{③+②\times(-3) \\ ④+②\times(-1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

次に，$d_1\boldsymbol{a}_1+d_2\boldsymbol{a}_2+d_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{o}$ とする．同様に $B=(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3)$ として同次連立1次方程式 $B\boldsymbol{d}=\boldsymbol{o}$ を考える．rank $B=2$ になるから定理3.4により非自明解 $\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{o}$ をもつ．よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は1次従属である．

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{②+① \\ ③+①\times(-4)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{②\times(1/2) \\ ③+④\times 9,\ ④+②\times(-1/2)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例題4.4を数ベクトル空間で考えれば，次の定理が得られる．

定理 4.3

$\boldsymbol{R}^n$ または $\boldsymbol{C}^n$ の m 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ を列ベクトルとする (n, m) 行列を A とおけば

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \text{ が1次独立} \iff \text{rank}\, A = m$$

が成り立つ．とくに，$m=n$ すなわち A が n 次正方行列であれば

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{ が1次独立} \iff A \text{ が正則行列.}$$

証明 $$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{o},$$

$$\boldsymbol{a}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \qquad (j=1, 2, \cdots, m)$$

とすれば，同次連立1次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0 \end{cases}$$

を得る．定理3.4により

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \text{ が1次独立} \iff \text{連立方程式}(*)\text{が自明解のみをもつ}$$
$$\iff \operatorname{rank} A = m.$$

$m=n$ のときは，定理3.6より明らかである．■

注意　定理4.3で $m>n$ とすれば，次がいえる．

$\boldsymbol{R}^n$ および $\boldsymbol{C}^n$ の $n+1$ 個以上のベクトルは1次従属である．

問22　$\boldsymbol{C}^3$ のベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\omega\\\omega^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\omega^2\\\omega\end{pmatrix}$ $(\omega^3=1,\ \omega\neq1)$ は1次独立であることを示せ．

問23　$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ の他にベクトルを1つ選んで，これら3つが1次独立になるようにせよ．

ベクトルの1次独立および1次従属に関する次の定理は基本的である．

定理4.4

線形空間 V のベクトルについて，次が成り立つ．

（1）　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が1次従属であれば，これらのすべてを含むベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{m+r}$ も1次従属である．

（2）　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が1次従属であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ のうち1個のベクトルが他の $m-1$ 個のベクトルの1次結合で書けることである．

（3）　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が1次独立で，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}$ が1次従属であれば，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の1次結合で書ける．

証明 （１） 少なくとも１つは０でない数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ があって

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{o}$$

が成り立つ．この１次関係式を

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m+0\boldsymbol{a}_{m+1}+\cdots+0\boldsymbol{a}_{m+r}=\boldsymbol{o}$$

と見れば，$c_1, c_2, \cdots, c_m$ のすべては０でないから，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{m+r}$ は１次従属になる．

（２） 少なくとも１つは０でない数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ があって

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{o}$$

が成り立つとする．たとえば $c_1 \neq 0$ とすれば

$$\boldsymbol{a}_1=\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)\boldsymbol{a}_2+\cdots+\left(-\frac{c_m}{c_1}\right)\boldsymbol{a}_m$$

となり，$\boldsymbol{a}_1$ が他の $\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の１次結合で書ける．

逆に，たとえば $\boldsymbol{a}_1$ が $\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の１次結合で書けたとする：

$$\boldsymbol{a}_1=c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m.$$

これを，$(-1)\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{o}$ と変形すれば，１次関係式の係数に０でないものがあるから，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ は１次従属になる．

（３） 少なくとも１つは０でない数 $c_1, c_2, \cdots, c_m, d$ があって

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m+d\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$$

が成り立つ．もし $d=0$ ならば

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{o}$$

となる．$c_1, c_2, \cdots, c_m$ の中に少なくとも１つは０でない数があるので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が１次独立であることに矛盾する．

したがって，$d \neq 0$ になるから

$$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{c_1}{d}\right)\boldsymbol{a}_1+\cdots+\left(-\frac{c_m}{d}\right)\boldsymbol{a}_m.$$

■

問 24 幾何ベクトルの１次独立に関して，次を示せ．

（１） 平面ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ において

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が１次独立 $\Longleftrightarrow$ ３点 O, A, B は同一直線上にない

（２） 空間ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ において

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が1次独立 $\Longleftrightarrow$ 4点 O, A, B, C は同一平面上にない

問25　線形空間 V の $\boldsymbol{o}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ について，次を示せ．

（1）　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が1次独立で，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ が1次従属ならば，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ も1次独立になる．

（2）　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が1次独立であるとき，$2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}, 4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ も1次独立になる．

4.3　基底と次元

◈基底と次元◈

線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が次の2つの条件を満たすとき，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の**基底**という．

（1）　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は1次独立である．

（2）　V の任意のベクトルは $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の1次結合で書ける．

条件（2）は $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ が成り立つことと同値である．

例17　$\boldsymbol{R}^n$ における n 個の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は $\boldsymbol{R}^n$ の基底である．この基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を **$\boldsymbol{R}^n$ の標準的基底**という．

例18　$\boldsymbol{C}^n$ においても，同様に，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は $\boldsymbol{C}^n$ の基底になる．この基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ も **$\boldsymbol{C}^n$ の標準的基底**という．

例19　2次の行列全体のつくる線形空間 M_2 において，

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

は基底である．一般に (m, n) 行列全体のつくる線形空間 $M_{m,n}$ において，行列単位 $E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{ij}, \cdots, E_{mn}$（10ページ参照）は基底である．

例20　2次以下の多項式全体からなる線形空間では，$\{1, x, x^2\}$ は基底である．

問26　例19と例20を示せ．

例題4.5　次の3個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底になることを示せ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

解答　行列 $A = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3)$ に対して，行列式 $|A| = 15 \neq 0$ より，A は正則行列である．よって，定理 4.3 から $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である．

次に，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が $\boldsymbol{R}^3$ を生成することを示す．そのためには，$\boldsymbol{R}^3$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$$

となる実数 c_1, c_2, c_3 がとれることをいえばよい．

この式の各成分を比較すると連立 1 次方程式

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 \phantom{{}+4c_3} = x_1 \\ \phantom{c_1+{}} 5c_2 - c_3 = x_2 \\ -2c_1 + c_2 + 4c_3 = x_3 \end{cases}$$

が得られる．この方程式の係数行列は正則行列 A であるから，解が求まる．実際

$$c_1 = \frac{1}{5}(7x_1 + 4x_2 + x_3)$$

$$c_2 = \frac{1}{15}(2x_1 + 4x_2 + x_3)$$

$$c_3 = \frac{1}{3}(2x_1 + x_2 + x_3)$$

である．

例題 4.5 が示すように，$\boldsymbol{R}^3$ には標準基底以外にも基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ が存在する．このように，線形空間には基底はいく組も存在する．しかし，次の定理により基底を構成するベクトルの個数は一定である．

定理 4.5

線形空間 V の基底を構成するベクトルの個数は，基底によらず一定である．

証明　V の2組の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}, \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ をとる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は V の元であるから，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の1次結合で書ける：

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = a_{11}\boldsymbol{u}_1 + a_{21}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{u}_m \\ \boldsymbol{v}_2 = a_{12}\boldsymbol{u}_1 + a_{22}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{u}_m \\ \quad\cdots\cdots \\ \boldsymbol{v}_n = a_{1n}\boldsymbol{u}_1 + a_{2n}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{u}_m. \end{cases}$$

これらを $c_1, c_2, \cdots, c_n$ をスカラーとする1次関係式

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$$

に代入すれば

$$\begin{aligned} &c_1(a_{11}\boldsymbol{u}_1 + a_{21}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{u}_m) + \cdots + c_n(a_{1n}\boldsymbol{u}_1 + a_{2n}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{u}_m) \\ &= (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n)\boldsymbol{u}_m \\ &= \boldsymbol{o}. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は1次独立であるから

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = 0 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = 0. \end{cases}$$

$m < n$ であれば，この同次連立1次方程式は非自明解をもつ（71ページ参照）．すなわち，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は1次従属になって $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ が基底であることに矛盾する．よって $m \geqq n$ である．

次に，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}, \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ の立場をとりかえて考えれば，$m \leqq n$ を得る．

したがって，$m = n$ となり基底をつくるベクトルの個数は一定である．　▩

線形空間 V の基底を構成するベクトルの個数を V の**次元**といい，$\dim V$ で表す．$V = \{\boldsymbol{o}\}$ のときは，$\dim V = 0$ と定める．また，$\dim V = n$ となる自然

数 n が存在するとき，V は**有限次元線形空間**または **n 次元線形空間**であるといい，有限次元でない線形空間を**無限次元線形空間**という．

例 21 例 17 と例 18 より $\dim \boldsymbol{R}^n = n$，$\dim \boldsymbol{C}^n = n$．

例 22 例 19 より (m, n) 行列全体のつくる線形空間 $M_{m,n}$ の次元は mn である．

例 23 任意の連続関数を特別な有限個の連続関数の 1 次結合で書くことはできないから，89 ページ例 9 の連続関数のつくる線形空間 $C(I)$ は無限次元である．

線形空間 V に r 個の 1 次独立なベクトルがあり，V のどの $r+1$ 個のベクトルも 1 次従属になるとき，r を V に属する **1 次独立なベクトルの最大個数**という．

次の定理は有用である．

定理 4.6

有限次元線形空間 V の次元 $\dim V$ は V に属する 1 次独立なベクトルの最大個数に一致する．

証明 V の 1 次独立なベクトルの最大個数を n として，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を 1 次独立な n 個のベクトルとする．V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$n+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は 1 次従属であるから，定理 4.4 (3) により $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合で書ける．したがって，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は基底になる．すなわち，$\dim V = n$． ▮

有限次元線形空間 V の部分空間 W の基底と次元も V のときと同様に定義する．このとき，定理 4.6 から容易に

$$\dim V \geqq \dim W$$

が成り立つ．また，W が V の部分空間であれば，

$$\dim V = \dim W \quad \text{のとき} \quad V = W$$

が成り立つ．実際，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ を W の1組の基底とする．$V \supsetneqq W$ とすれば，$V \ni \boldsymbol{b}$，$W \not\ni \boldsymbol{b}$ となるベクトル $\boldsymbol{b}$ が存在する．このとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$, $\boldsymbol{b}$ は1次独立になるから $W \subsetneqq W' = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b} \rangle \subset V$．したがって $\dim W' = r+1$，$\dim W < \dim V$．これは矛盾である． ■

問 27　この証明で，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}$ が1次独立になるのはなぜか．

問 28　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ を $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルとする．この中で1次独立なベクトルの最大個数は $\dim \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \rangle$ に一致することを示せ．

(m, n) 行列 A と A を階段行列 B に変形したときの列ベクトル表示をそれぞれ

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n), \qquad B = (\boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{b}_n)$$

とする．同次連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ と $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ は同値であるから，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の1次関係式は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ でも成り立ち，逆に $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ の1次関係式は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ でも成り立つ．$\operatorname{rank} A = r$ は B の行ベクトルのうち0でない最初の成分を含む列ベクトルの個数であるから，それらの r 個の列ベクトルは $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ での1次独立なベクトルの最大個数になる．

したがって

定理 4.7

rank A は A の列ベクトルの1次独立なものの最大個数に一致する．

定理4.6から，(m, n) 行列 $A = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n)$ に対して

$$\operatorname{rank} A = \dim \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$$

が成り立つことがわかる．

例 24　4.2節例題4.4から得られる行列は

$$(\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3 \quad \boldsymbol{a}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2 \quad \boldsymbol{b}_3 \quad \boldsymbol{b}_4) = B$$

と変形される．B の行ベクトルのうち 0 でない最初の成分を含む列ベクトルは $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4$ である．したがって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立で，$\boldsymbol{b}_3 = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$ より，$\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$ が成り立つ．

問 29　$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 3 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

で生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間の次元を求めよ．

例題 4.5 からわかるように，$\boldsymbol{R}^3$ において $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立になることと $\boldsymbol{R}^3 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ であることは，$A = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3)$ の正則性によっているだけである．すなわち，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ が基底であることを示すには，基底の定義の（1）か（2）のどちらか一方を示せばよい．このことは，次元のわかっている一般の線形空間で成り立つ：

定理 4.8

$\dim V = n$ のとき，V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ に対して，次の 3 条件は同値である．

（1）　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である．

（2）　$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$．

（3）　$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ は V の基底である．

証明　（1）$\Longrightarrow$（2）　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立であるとして，$W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ とおく．基底の定義より $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ は W の基底である．したがって，$\dim W = n = \dim V$ となり $V = W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$．

（2）$\Longrightarrow$（3）　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立になることを示せばよい．V の基底

$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ をとり，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が1次従属であるとする．このとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ のうち1次独立なベクトルの最大個数を $r\,(r < n)$ とする．必要ならばベクトルの順序を入れかえれば，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ が1次独立で，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_s$ $(r < s \leqq n)$ が1次従属にできる．このとき，定理4.4(3)から，$\boldsymbol{v}_s \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r\rangle$．そこで，各 $i\,(1 \leqq i \leqq n)$ について，$\boldsymbol{u}_i \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\rangle$ であるから，$\boldsymbol{u}_i \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r\rangle$．$V$ の任意のベクトルは $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の1次結合で書けるから $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r\rangle$ が成り立つ．よって，$\dim V = r < n$ となって仮定に反する．

(3)$\Longrightarrow$(1)は明らか．▩

問30　$A = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n)$ を n 次正方行列の列ベクトル表示とする．A が正則行列になる必要十分条件は列ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が $\boldsymbol{R}^n$ の基底になることである．これを示せ．

◈次元に関する公式◈

定理4.9（基底の延長）

W を n 次元線形空間 V の部分空間とする．$\dim W = r\,(n > r)$ のとき，W の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_r\}$ に $n-r$ 個の適当な V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-r}$ を付け加えて n 個のベクトル $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-r}\}$ が V の基底であるようにできる．

証明　任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対して，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{a}$ が1次従属であれば，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_r$ は1次独立であることから，定理4.4(3)により $\boldsymbol{a} \in \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_r\rangle$．すなわち，$V = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_r\rangle$．よって，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_r\}$ は V の基底になり $n = \dim V = r$．これは仮定に反する．したがって，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{v}_1$ が1次独立となる $\boldsymbol{v}_1 \in V$ が存在する．

次に，1次独立であるこれらのベクトルの組 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{v}_1$ において $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_r$ で行ったのと同様な操作を実行すれば，1次独立な組 $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が得られる．このような操作を繰り返せばよい．▩

問 31 $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{a}_3$ を選んで $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ が $\boldsymbol{R}^3$ の基底になるようにせよ．

有限次元線形空間 V の部分空間 W_1, W_2 について，次の公式が成り立つ．

定理 4.10

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

証明 V の部分空間 $W_1 \cap W_2$ の基底を $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$ とする．$W_1 \cap W_2$ は W_1 と W_2 の部分空間であるから，定理 4.9 により $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s\}$ が W_1 の基底，$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_t\}$ が W_2 の基底であるように $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_t \in V$ をとる．このとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_t\}$ が $W_1 + W_2$ の基底になることを示せばよい．実際，$\dim W_1 = r+s$，$\dim W_2 = r+t$，$\dim(W_1 \cap W_2) = r$，$\dim(W_1 + W_2) = r+s+t$ となるからである．

以下 $c_1, \cdots, c_r, d_1, \cdots, d_s, k_1, \cdots, k_t, h_1, \cdots, h_r$ をスカラーとする．

$$(*) \qquad c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{v}_r + d_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + d_s\boldsymbol{w}_s + k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_t\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{o}$$

とするとき

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{v}_r + d_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + d_s\boldsymbol{w}_s = -(k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_t\boldsymbol{u}_t)$$

の左辺は W_1 のベクトル，右辺は W_2 のベクトルである．よって，右辺は $W_1 \cap W_2$ のベクトルとなり

$$-(k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_t\boldsymbol{u}_t) = h_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + h_r\boldsymbol{v}_r$$

と書ける．すなわち $h_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + h_r\boldsymbol{v}_r + k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_t\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{o}$．$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_t\}$ は W_2 の基底であるから

$$h_1 = \cdots = h_r = k_1 = \cdots = k_t = 0.$$

よって，$(*)$ は $c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{v}_r + d_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + d_s\boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{o}$ となる．$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s\}$ は W_1 の基底であるから

$$c_1 = \cdots = c_r = d_1 = \cdots = d_s = 0.$$

したがって，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_t$ は 1 次独立である．

次に，$W_1 + W_2$ の任意の元 $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ ($\boldsymbol{a}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{a}_2 \in W_2$) をとれば，

$$\boldsymbol{a}_1 = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{v}_r + d_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + d_s\boldsymbol{w}_s$$
$$\boldsymbol{a}_2 = h_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + h_r\boldsymbol{v}_r + k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_t\boldsymbol{u}_t$$

と書けるから

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = (c_1 + h_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (c_r + h_r)\boldsymbol{v}_r + d_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + d_s\boldsymbol{w}_s + k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_t\boldsymbol{u}_t.$$

すなわち，$W_1 + W_2$ は $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_t$ で生成される．

以上より，$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_t\}$ は $W_1 + W_2$ の基底である．■

例題 4.6　$\boldsymbol{R}^4$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 = 2x_2,\ \ x_3 = 3x_4 \right\}$$

に対して，$\dim W_1$, $\dim W_2$, $\dim(W_1 + W_2)$, $\dim(W_1 \cap W_2)$ を求めよ．

解答　W_1 の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は同次連立1次方程式

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

の解であるから

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 - c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 + c_3\boldsymbol{w}_3,$$

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される．すなわち，$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$．ベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ は1次独立であるから，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ は W_1 の基底になる．よって，$\dim W_1 = 3$.

W_2 についても，同様に

$$W_2 \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ c_1 \\ 3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表され，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ が基底になるから $\dim W_2 = 2$.

次に，$W_1 \cap W_2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

を解くことにより $x_1 = -8c$，$x_2 = -4c$，$x_3 = 9c$，$x_4 = 3c$．すなわち

$$W_1 \cap W_2 \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} c$$

となり，$\dim (W_1 \cap W_2) = 1$.

したがって，定理4.10より $\dim (W_1 + W_2) = 4$.

問32 例題4.6での，$W_1 + W_2$ の基底を1組求めよ．

問33 (m, n) 行列 A に対する同次連立1次方程式の解空間

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$

について，$\dim W = n - \operatorname{rank} A$ が成り立つこと，およびその基本解が W の基底になることを示せ．

◈ **基底変換の行列** ◈

$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を n 次元線形空間 V の基底とする．V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は n^2 個のスカラー $p_{ij}\,(1 \leqq i, j \leqq n)$ により

$$(*)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = p_{11}\boldsymbol{u}_1 + p_{21}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{u}_n \\ \boldsymbol{v}_2 = p_{12}\boldsymbol{u}_1 + p_{22}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{u}_n \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{v}_n = p_{1n}\boldsymbol{u}_1 + p_{2n}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{u}_n \end{cases}$$

で表される．このとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ もまた V の基底になる条件を求めよう．$c_1, c_2, \cdots, c_n$ をスカラーとする1次関係式

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$$

に(＊)を代入すれば

$$(p_{11}c_1 + p_{12}c_2 + \cdots + p_{1n}c_n)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + (p_{n1}c_1 + p_{n2}c_2 + \cdots + p_{nn}c_n)\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{o}.$$

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は1次独立であるから，同次連立1次方程式

$$P\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}, \qquad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ & \cdots\cdots & \cdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

を得る．定理3.6より

$$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \text{ が1次独立} \iff P\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o} \text{ が自明解のみをもつ}$$
$$\iff P \text{ は正則行列．}$$

したがって，定理4.8により，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底になるための必要十分条件は P が正則行列になることである．

そこで，V の2組の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}, \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ に対して，(＊)すなわち

$$\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{u}_i \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

で決まる正則行列 $P = (p_{ij})$ を基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ から基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ への**基底変換の行列**といい，

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\} \xrightarrow{P} \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$$

で表す．

数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}^n$ の場合は，（＊）は行列の列ベクトル表示より

$$(\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

と書くことができる．

例 25　$\boldsymbol{R}^2$ の 2 組の基底 $\left\{\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

に対する $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} \xrightarrow{P} \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = p_{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + p_{21}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = p_{12}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + p_{22}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

より，$P = \begin{pmatrix} 18 & -11 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$.

問 34　例 25 において，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} \xrightarrow{Q} \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ となる行列 Q を求めよ．

例題 4.7　n 次元線形空間 V の 3 組の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$ に対して

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\} \xrightarrow{P} \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\},$$

$$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\} \xrightarrow{Q} \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$$

ならば，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\} \xrightarrow{PQ} \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$ であることを示せ．

解答　$P = (p_{ij})$，$Q = (q_{ij})$ とおけば，

$$\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{u}_i \qquad (j = 1, \cdots, n),$$

$$\boldsymbol{w}_k = \sum_{j=1}^{n} q_{jk}\boldsymbol{v}_j \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

である．これら 2 式から

$$\boldsymbol{w}_k = \sum_{j=1}^{n} q_{jk}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}q_{jk}\right)\boldsymbol{u}_i$$

を得る．$PQ = \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}q_{jk}\right)$ であるから

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\} \xrightarrow{PQ} \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}.$$

例題4.7で，とくに $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n\} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と考えれば，$PQ = E$ になるから，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\} \xrightarrow{P^{-1}} \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$.

問35　$\boldsymbol{R}^n$ において，標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ から別の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ への基底変換の行列を求めよ．

練習問題4

[A]

1.　空間ベクトル $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$ について，次を計算せよ．

（1）　$5(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) - 2(4\boldsymbol{a} + 7\boldsymbol{b})$　　　（2）　$(2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b})$

2.　空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対して，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を計算せよ．

3.　正6角形ABCDEFにおいて，$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を用いて表せ．

4.　位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{c}$ に対して，終点A, B, Cが同一直線上にあるための必要十分条件は $l\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} + n\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$，$l + m + n = 0$，$lmn \neq 0$ となる実数 l, m, n が存在することである．このことを示せ．

5.　次の $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合は部分空間になるか．

（1）　$W_1 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_2 = 0\right\}$　　　（2）　$W_2 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 > x_2 > x_3\right\}$

（3）　$W_3 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 = x_2\right\}$　　　（4）　$W_4 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2, x_3 \text{ は有理数}\right\}$

6. $I=[-1,1]$ で連続な関数全体からなる線形空間 $C(I)$ において，次の条件を満たす関数 $f(x)$ 全体のつくる部分集合はそれぞれ $C(I)$ の部分空間になるか．

（1） $f(-1)=f(1)$　（2） $f'(0)=0$　（3） $f(x)=-f(-x)$

（4） $f(x)\geqq 0$　（5） $f(x)$ は区間 $(-1,1)$ で微分可能

7. 次のベクトルは1次独立か1次従属かを調べよ．

（1） $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$　（2） $\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$

（3） $\begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

（4） $\begin{pmatrix}1\\9\\2\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\11\\4\\12\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\13\\6\\14\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\15\\8\\16\end{pmatrix}$

（5） $\begin{pmatrix}i\\2\\1-i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4+3i\\0\\2i\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1+3i\\-1\\1+i\end{pmatrix}$

8. （1） $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a\\1\\a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\a\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}2\\-3\\a\end{pmatrix}$ が1次従属になるように a の値を定めよ．

（2） $\boldsymbol{C}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\a\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}$ が1次従属になるように a の値を定めよ．

9. 次の集合は1次独立になるか．

（1） $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$　（2） $x,\ \sin x,\ \cos x$

10. $\boldsymbol{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\-4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}7\\-1\\4\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}0\\5\\-3\\0\end{pmatrix}$ に対して

（1） 1次独立なベクトルの最大個数 r を求めよ．

（2） r 個の1次独立なベクトルを求め，他のベクトルをこれらの1次結合で表

せ．

11． $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ について，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{R}^3$ を生成するか．また，$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{v}$ が $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle$ に属するための $\boldsymbol{v}$ の成分に関する条件を求めよ．

12． $\boldsymbol{R}^4$ の次の部分空間の次元と基底を求めよ．

（1）　$W_1=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle| x_1+2x_2=0,\ 2x_1-x_3=0\right\}$

（2）　$W_2=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle| \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

13． 2次以下の多項式全体からなる線形空間において，$\{x+2, x-1, x^2+x\}$ は基底になることを示せ．

14． $\boldsymbol{R}^n \supset \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の基底であることを示せ．

15． $\boldsymbol{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}7\\1\\3\\-5\end{pmatrix}$ に対して $W_1=\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\rangle$, $W_2=\langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\rangle$ とおくとき，W_1+W_2 と $W_1\cap W_2$ のそれぞれの次元および基底を求めよ．

16． $\boldsymbol{R}^3$ の2組の基底 $\left\{\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ に関する基底変換の行列 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}\xrightarrow{P}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ を求めよ．

17． $\boldsymbol{R}^3=\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle$ のとき，次の基底変換の行列を求めよ．

（1）$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} \longrightarrow \{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\}$
（2）$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} \longrightarrow \{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\}$

18. $\boldsymbol{C}^2$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\-i\end{pmatrix}\right\}$ を $\left\{\begin{pmatrix}a+bi\\a-bi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c+di\\c-di\end{pmatrix}\right\}$ $(ad-bc \neq 0)$ に変換する行列を求めよ．

[B]

1. 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が $\|\boldsymbol{a}\| = 1$，$\|\boldsymbol{b}\| = 3$，$\|\boldsymbol{c}\| = 2$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ を満たすとき，内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$ を求めよ．

2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が空間ベクトルのとき，次を示せ．
（1）$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$
（2）$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$

3. n 次以下の多項式のつくる線形空間の次元を求めよ．

4. n 次実行列のつくる線形空間 M_n において，次の各部分集合は M_n の部分空間になるか．
（1）$W_1 = \{A \mid A$ は対称行列$\}$　　（2）$W_2 = \{A \mid A$ は交代行列$\}$
（3）$W_3 = \{A \mid A^2 = A\}$ |　　（4）$W_4 = \{A \mid |A| = 0\}$

5. $\boldsymbol{R}^3 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ のとき，$\boldsymbol{R}^3 = \langle \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1 \rangle$ を示せ．

6. ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立ならば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$ も 1 次独立になることを示せ．

7. 実数列 $\{a_n\}$ $(n \geqq 0)$ の全体からなる集合 V は線形空間になることを示せ．また，$W = \{\{a_n\} \mid a_n = a_{n-1}+a_{n-2},\ n = 2, 3, \cdots\}$ は基底として

$$\{u_n\} = \{u_0, u_1, \cdots\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, \cdots\}$$
$$\{v_n\} = \{v_0, v_1, \cdots\} = \{1, 0, 1, 1, 2, 3, \cdots\}$$

をもつ V の部分空間になることを証明せよ．

8. 定数係数 2 階線形微分方程式 $y''+ay'+by = 0$ の解の全体は線形空間になることを示せ．

9. A, B を n 次行列とするとき，$AX = XB$ を満たす X の全体は n 次行列全体からなる線形空間の部分空間になることを示せ．

10. 線形空間 V とその部分空間 W_1, W_2 に対して，V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ が

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2 \quad (\boldsymbol{a}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{a}_2 \in W_2)$$

と一意的に表されるとき，V は W_1 と W_2 の**直和**であるといい，$V = W_1 \oplus W_2$ と書く．このとき，次を示せ．
（1）$V = W_1 \oplus W_2 \iff V = W_1+W_2,\ W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$
（2）V が有限次元で，$V = W_1 \oplus W_2$ のとき，$\dim V = \dim W_1+\dim W_2$

（3）　$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$，$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ のとき，$\boldsymbol{R}^3 = W_1 \oplus W_2$

11. 行列 A からいくつかの行と列を取り除いて得られる正方行列を A の小行列という．A の小行列のうち行列式が 0 でないものの最大次数は rank A に一致することを示せ．

5

線 形 写 像

5.1 線 形 写 像

◈写　像◈

2つの集合 X, Y において，X の任意の元に対して Y の1つの元が対応しているとき，この対応 f を X から Y への**写像**と呼び，$f: X \to Y$ で表す．

写像 f で X の元 x に対応する Y の元 y を f による x の**像**と呼び，$y = f(x)$ または $f: x \to y$ で表す．また，X の部分集合 A に対して，Y の部分集合

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

を f による A の**像**という．とくに，f による X の像が Y に一致するとき，すなわち $f(X) = Y$ であるとき，f は**全射**であるという．

Y の元 y に対して，$f(x) = y$ が成り立つような X の元 x の全体を y の**逆像**といい，$f^{-1}(y)$ で表す．すなわち

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

また，Y の部分集合 B に対して，X の部分集合

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$$

を f による B の**逆像**という．

X の任意の2元 x, x' に対して

$$x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

が成り立つとき，f は**単射**であるという．全射であると同時に単射であるような写像を**全単射**であるという．

写像 $f: X \to X$ において，すべての $x \in X$ に対して $f(x) = x$ のとき，

f は**恒等写像**であるといって，1_X で表す．

$f: X \to Y$ が全単射であれば，Y の任意の元 y に対して，y の逆像 $f^{-1}(y)$ はただ1つの元からなる．このとき，y に $f^{-1}(y) \in X$ を対応させる Y から X への写像を f の**逆写像**と呼び，f^{-1} で表す．f^{-1} も全単射である．

2つの写像 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$ に対して，X の元 x に Z の元 $g(f(x))$ を対応させる写像を $g \cdot f$ と書き，f と g の**合成写像**という．すなわち，

$$g \cdot f: X \to Z, \qquad (g \cdot f)(x) = g(f(x)) \qquad (x \in X).$$

全単射である $f: X \to Y$ とその逆写像 f^{-1} に対して

$$f^{-1} \cdot f = 1_X, \qquad f \cdot f^{-1} = 1_Y$$

が成り立つ．

例1　$f(x) = \cos x$ で定義される写像 $f: \boldsymbol{R} \to [-1, 1]$ は全射であるが，単射ではない．

例2　$f(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ で定義される写像 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ は単射であるが，全射ではない．

問1　$f: X \to Y$ が全射であるためには，Y の任意の元 y に対して，$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在することである．これを示せ．

問2　$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ で決まる写像 $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ は全単射になることを示せ．また，f の逆写像は何か．

◈線形写像◈

V, V' をともに線形空間とする．V から V' への写像 $f: V \to V'$ が**線形写像**であるとは

（1）　任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して，$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})$

（2）　任意の $\boldsymbol{a} \in V$ と任意のスカラー c に対して，$f(c\boldsymbol{a}) = cf(\boldsymbol{a})$

が成り立つときをいう．

とくに，$V = V'$ のとき，線形写像 $f: V \to V$ を V の**線形変換**（または**1**

次変換）ともいう．

問 3　上の条件（１），（２）は，次の条件と同値であることを示せ．
　任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ とスカラー c, d に対して

$$f(c\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{b}) = cf(\boldsymbol{a})+df(\boldsymbol{b}).$$

$f: V \to V'$ が線形写像のとき，（２）で $c = 0$ にとれば，零ベクトルに関して

$$f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$$

が成り立つ（V, V' における両方の零ベクトルを同じ記号 $\boldsymbol{o}$ で表しても混乱はまねかない）．

また，V のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ とスカラー $c_1, c_2, \cdots, c_r$ に対して

$$f(c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{a}_r) = c_1f(\boldsymbol{a}_1)+c_2f(\boldsymbol{a}_2)+\cdots+c_rf(\boldsymbol{a}_r)$$

が成り立つ．

例 3　$f(x) = 3x$ で定義される写像 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は線形写像である．

例 4　$f(x) = 3x+1$ で定義される写像 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は線形写像でない．

例 5　$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ で定義される写像 $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ は線形変換である．

例題 5.1　$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+x_2+3x_3 \\ 2x_1+3x_2-x_3 \end{pmatrix}$ で定義される写像 $f: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ は全射である線形写像になることを示せ．

解答　任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ と実数 c をとれば

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+y_1+x_2+y_2+3(x_3+y_3) \\ 2(x_1+y_1)+3(x_2+y_2)-(x_3+y_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1+x_2+3x_3 \\ 2x_1+3x_2-x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1+y_2+3y_3 \\ 2y_1+3y_2-y_3 \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}).$$

$$f(c\boldsymbol{x}) = f\left(\begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ cx_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} cx_1+cx_2+3cx_3 \\ 2cx_1+3cx_2-cx_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x_1+x_2+3x_3 \\ 2x_1+3x_2-x_3 \end{pmatrix}$$

$$= cf(\boldsymbol{x}).$$

したがって，f は線形写像である．

次に，$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ をとる．連立１次方程式

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3 = t_1 \\ 2x_1+3x_2-x_3 = t_2 \end{cases}$$

は，その係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

の階数は２で自由度は１になるから，任意の t_1, t_2 に対して解をもつ．

したがって，f は全射である．

問４　$f: x \to \begin{pmatrix} ax^2+bx \\ c \end{pmatrix}$ で定義される写像 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ が線形写像になるための条件を求めよ．

問５　$I = [a, b]$ で連続な関数全体のつくる線形空間 $C(I)$ において，$f(x) \to \int_a^b f(x)\,dx$ で定義される写像 $C(I) \to \boldsymbol{R}$ は線形写像であることを示せ．

定理 5.1

線形写像 $f: V \to V'$ に対して

（１）　W を V の部分空間とするとき，f による W の像

$$f(W) = \{f(\boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{a} \in W\}$$

は V' の部分空間になる．

（2） W' を V' の部分空間とするとき，f による W' の逆像

$$f^{-1}(W') = \{\boldsymbol{a} \in V \mid f(\boldsymbol{a}) \in W'\}$$

は V の部分空間になる．

証明 （1） 任意の $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}' \in f(W)$ をとれば，$\boldsymbol{a}' = f(\boldsymbol{a})$，$\boldsymbol{b}' = f(\boldsymbol{b})$ となる $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ が存在する．W は V の部分空間であるから，c をスカラーとすると

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W, \qquad c\boldsymbol{a} \in W.$$

このとき

$$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}' = f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \in f(W)$$
$$c\boldsymbol{a}' = cf(\boldsymbol{a}) = f(c\boldsymbol{a}) \in f(W)$$

であるから，$f(W)$ は V' の部分空間になる．

（2） 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in f^{-1}(W')$ をとれば，$f(\boldsymbol{a}) \in W'$，$f(\boldsymbol{b}) \in W'$．W' は V' の部分空間であるから，c をスカラーとして

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b}) \in W'$$
$$f(c\boldsymbol{a}) = cf(\boldsymbol{a}) \in W'.$$

したがって，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in f^{-1}(W')$，$c\boldsymbol{a} \in f^{-1}(W')$ となって，$f^{-1}(W')$ は V の部分空間になる． ■

◈像と核◈

f による V の像 $f(V)$ を $\mathrm{Im}\, f$ で表し，f の**像**という．定理 5.1 から $\mathrm{Im}\, f$ は V' の部分空間である．また，V' の零ベクトルの逆像

$$f^{-1}(\boldsymbol{o}) = \{\boldsymbol{a} \in V \mid f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}\}$$

を $\mathrm{Ker}\, f$ で表し，f の**核**という．$\mathrm{Ker}\, f$ も定理 5.1 から V の部分空間になる．

とくに

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{o}\} \iff f \text{ が単射}$$

が成り立つ．

実際，$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{o}\}$ とする．このとき，$f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b})$（$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$）とすれば，$f(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{o}$ より $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \in \mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{o}\}$．よって $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$．逆に，$f$ を単射とす

る．$\mathrm{Ker}\, f \ni \boldsymbol{a}$ をとれば $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o} = f(\boldsymbol{o})$ から $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$．よって，$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{o}\}$．

また，明らかに

$$\mathrm{Im}\, f = V' \iff f \text{ が全射}$$

が成り立つ．

問 6　$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_1 + ax_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$ で決まる線形写像 $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ が単射になるように a の条件を求めよ．

例題 5.2　線形写像 $f: \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ が

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすとき，

（1） $\boldsymbol{R}^4$ の基本ベクトルの像 $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3), f(\boldsymbol{e}_4)$ を求めよ．

（2） $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ．

解答　（1）　$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) = f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=f(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=2f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=f(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)$$

$$=f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3)+f(\boldsymbol{e}_4)=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}.$$

したがって

$$f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix},\qquad f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix},\qquad f(\boldsymbol{e}_4)=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

（2） $\boldsymbol{R}^4$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3+x_4\boldsymbol{e}_4$ をとれば

$$f(\boldsymbol{x})=x_1f(\boldsymbol{e}_1)+x_2f(\boldsymbol{e}_2)+x_3f(\boldsymbol{e}_3)+x_4f(\boldsymbol{e}_4)$$
$$=x_1\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x_1 \quad\quad +3x_3+\ x_4 \\ x_1+x_2+2x_3-2x_4 \\ 3x_1-x_2-4x_3+2x_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

実(m, n)行列 $A=(a_{ij})$ が与えられたとき，写像 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ を

$$\boldsymbol{R}^n \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}\ x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}\ x_n \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^m$$

で定義する．このとき

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$$

$$f(c\boldsymbol{x}) = A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R},\ c \in \boldsymbol{R})$$

が成り立つから，f は線形写像になる．この f を**行列 A に対応する線形写像**という．この場合

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$

であるから，A に対応する線形写像の核は同次連立1次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の解空間になる．したがって

$$\dim \mathrm{Ker}\, f = n - \mathrm{rank}\, A. \qquad (\text{定理 3.3 参照})$$

また，$A=(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}_n)$ を列ベクトル表示とすれば

$$\mathrm{Im}\, f = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\} = \{x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \boldsymbol{R}\}$$

$$= \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$$

であるから

$$\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle = \mathrm{rank}\, A. \qquad (102\text{ ページ参照})$$

したがって，$\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = n$ が成り立つ．

注意　複素 (m, n) 行列 A と線形写像 f: $\boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^m$ の関係も全く同じである．以下，第 5 章を通じて実行列と線形写像 f: $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ で成り立つことは，複素行列と f: $\boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^m$ に対しても成り立つ．

例 6　例題 5.1 の写像は $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ に対応する線形写像である．

次元に関する上記の式は有限次元線形空間における一般の線形写像に対しても成り立つ．すなわち

定理 5.2（次元公式）

V, V' を有限次元線形空間，f: $V \to V'$ を線形写像とするとき

$$\dim V = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f.$$

証明　$\dim \mathrm{Im}\, f = r$，$\dim \mathrm{Ker}\, f = s$ とおいて，$\mathrm{Im}\, f, \mathrm{Ker}\, f$ の基底をそれぞれ $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}, \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_s\}$ とする．このとき，$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{u}_1$，$f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{u}_2$，$\cdots$，$f(\boldsymbol{v}_r) = \boldsymbol{u}_r$ となる $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r \in V$ がとれるから，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_s\}$ が V の基底になることを示せばよい．以下，$c_1, \cdots, c_r, d_1, \cdots, d_s, h_1, \cdots, h_r, k_1, \cdots, k_s$ をスカラーとする．1 次関係式

$$(*) \qquad c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{v}_r + d_1\boldsymbol{w}_1 + d_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + d_s\boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{o}$$

が成り立てば，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_s \in \mathrm{Ker}\, f$ より

$$\begin{aligned} &f(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{v}_r + d_1\boldsymbol{w}_1 + d_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + d_s\boldsymbol{w}_s) \\ &\qquad = c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_r f(\boldsymbol{v}_r) \\ &\qquad = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{o}. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底であるから 1 次独立である．よって

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0.$$

したがって，$(*)$ より $d_1\boldsymbol{w}_1 + d_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + d_s\boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{o}$．また，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_s$ も 1 次独立であるから

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_s = 0.$$

すなわち，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_s$ は1次独立になる．

次に，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ をとれば，$f(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}\, f = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r \rangle$ であるから，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= h_1\boldsymbol{u}_1 + h_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + h_r\boldsymbol{u}_r \\ &= h_1 f(\boldsymbol{v}_1) + h_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + h_r f(\boldsymbol{v}_r) \\ &= f(h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + h_r\boldsymbol{v}_r). \end{aligned}$$

よって，

$$f(\boldsymbol{x} - h_1\boldsymbol{v}_1 - h_2\boldsymbol{v}_2 - \cdots - h_r\boldsymbol{v}_r) = \boldsymbol{o}.$$

すなわち

$$\boldsymbol{x} - h_1\boldsymbol{v}_1 - h_2\boldsymbol{v}_2 - \cdots - h_r\boldsymbol{v}_r \in \mathrm{Ker}\, f$$

であるから，

$$\boldsymbol{x} - h_1\boldsymbol{v}_1 - h_2\boldsymbol{v}_2 - \cdots - h_r\boldsymbol{v}_r = k_1\boldsymbol{w}_1 + k_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{w}_s$$

と書ける．したがって

$$\boldsymbol{x} = h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + h_r\boldsymbol{v}_r + k_1\boldsymbol{w}_1 + k_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{w}_s$$

となり

$$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_s \rangle.$$

以上より，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_s\}$ は V の基底になり，$\dim V = r + s$ を得る．■

問7　W を V の部分空間とするとき

$$\dim W = \dim f(W) + \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap W)$$

が成り立つことを示せ．

例題 5.3　$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ -2x_1 + x_2 \qquad - 5x_4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}$ で定義される線形写像

$f: \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ の像 $\mathrm{Im}\, f$ と核 $\mathrm{Ker}\, f$ のそれぞれの次元と1組の基底を求めよ．

解答 Ker f は同次連立1次方程式

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+\ x_4=0 \\ -2x_1+\ x_2 \qquad -5x_4=0 \\ 3x_1-5x_2+7x_3+4x_4=0 \end{cases}$$

の解空間である．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & -5 & 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}+\text{①}\times(-3)]{\text{②}+\text{①}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{③}+\text{②}\times 1/3]{\text{②}\times(-1/3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{①}+\text{②}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $x_3=c_1$，$x_4=c_2$ とおけば，$x_1=c_1-3c_2$，$x_2=2c_1-c_2$．すなわち，

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}c_1+\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}c_2$ と書けるから，Ker f の基底として

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ がとれて，dim Ker $f=2$．したがって，

dim Im $f=4-$dim Ker $f=2$．

また $\mathrm{Im}\, f=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}x_4 \,\middle|\, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \boldsymbol{R}\right\}$

で，

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad 3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

より

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle \ni \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．したがって，$\mathrm{Im}\, f$ の基底として $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$ がとれる．

問 8　A に対応する線形写像 $f: \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ に対して，次を示せ．

$$\mathrm{Im}\, f = \langle f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n) \rangle.$$

問 9　例題 5.1 および例題 5.2 の線形写像の $\mathrm{Im}\, f$ と $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と基底を求めよ．

線形写像 $f: V \to V'$ に対して，$\mathrm{Im}\, f$ の次元 $\dim \mathrm{Im}\, f$ を $\mathrm{rank}\, f$ で表し，f の**階数**または**ランク**という．

(m, n) 行列 $A = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n)$ に対応する線形写像 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ の階数について

$$\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle = \mathrm{rank}\, A$$

であったから，次の定理が成り立つ．

定理 5.3

(m, n) 行列 A とそれに対応する線形写像 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ に対して

$$\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, f.$$

例 7　例題 5.3 の線形写像 f のランクは $\mathrm{rank}\, A = 2$ である．$\mathrm{Im}\, f$ の次元を知るには，$\mathrm{rank}\, A$ が求まればよい．

例 8　$f: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ を $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ に対応する線形写像とする．

$$\mathrm{rank}\, A = \dim \mathrm{Im}\, f = 2 \qquad \text{より} \qquad \mathrm{Im}\, f = f(\boldsymbol{R}^3) = \boldsymbol{R}^2$$

になって f は全射である．

問 10 (m, n) 行列 A に対応する写像 $f:\ \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ について，次を示せ．

（1） f が全射 $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rank} A = m$

（2） f が単射 $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rank} A = n$.

◈ 同型写像 ◈

全単射である線形写像 $f:\ V \to V'$ を**同型写像**といい，このとき V は V' に**同型**であるという．

例 9 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ で決まる線形写像 $f:\ \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ は同型写像である．

例 10 $V = \{f(x) \mid 2$ 次以下の実数係数の多項式$\}$ として，$f:\ \boldsymbol{R}^3 \to V$ を

$f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right) = a_1 + a_2x + a_3x^2$ で定義するとき，f は同型写像である．

例 11 $\boldsymbol{R}^n$ は n 項行ベクトルの全体からなる線形空間 $\boldsymbol{R}_n$ に同型である．

例題 5.4 $\dim V = \dim V'$ のとき，V は V' に同型になる，すなわち V から V' への同型写像が存在する．このことを証明せよ．

解答 $\dim V = \dim V' = n$ として，V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ と V' の基底 $\{\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \cdots, \boldsymbol{v}_n'\}$ をとる．V のベクトル $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$ で表すとき，写像 $f:\ V \to V'$ を

$$f(\boldsymbol{a}) = c_1\boldsymbol{v}_1' + c_2\boldsymbol{v}_2' + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n'$$

で定義する．このとき，f は線形写像になる．実際，V の 2 つのベクトルを

$$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n, \qquad \boldsymbol{b} = d_1\boldsymbol{v}_1 + d_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + d_n\boldsymbol{v}_n$$

とすれば

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= f((c_1+d_1)\boldsymbol{v}_1 + (c_2+d_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (c_n+d_n)\boldsymbol{v}_n) \\ &= (c_1+d_1)\boldsymbol{v}_1' + (c_2+d_2)\boldsymbol{v}_2' + \cdots + (c_n+d_n)\boldsymbol{v}_n' \\ &= (c_1\boldsymbol{v}_1' + c_2\boldsymbol{v}_2' + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n') + (d_1\boldsymbol{v}_1' + d_2\boldsymbol{v}_2' + \cdots + d_n\boldsymbol{v}_n') \end{aligned}$$

$$= f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b}).$$

同様にして，スカラー c に対して，$f(c\boldsymbol{a}) = cf(\boldsymbol{a})$.

次に，任意の $\boldsymbol{y} \in V'$ をとれば，$\boldsymbol{y} = k_1\boldsymbol{v}_1'+k_2\boldsymbol{v}_2'+\cdots+k_n\boldsymbol{v}_n'$ と書けるから，$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{v}_n$ とすれば $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ となる．したがって，f は全射である．f が単射であることも基底の1次独立性からわかる．

問 11　逆に V が V' に同型であれば，$\dim V = \dim V'$ が成り立つことを示せ．

問 12　$f: V \to V'$ が同型写像であれば，f の逆写像 $f^{-1}: V' \to V$ も同型写像になることを示せ．

例題 5.4 と問 11 から実線形空間（または複素線形空間）V に対して

$$\dim V = n \iff V \text{ は } \boldsymbol{R}^n \text{（または } \boldsymbol{C}^n\text{）に同型}$$

が成り立つ．

5.2　表 現 行 列

◈ 線形写像に対応する行列 ◈

5.1 節で見たように，(m, n) 行列 A が与えられたとき，A に対応する線形写像，すなわち $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義される線形写像 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ が定まる．

この逆にあたることを考える．$f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ を任意の線形写像とする．$\boldsymbol{R}^n$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ の f による像を

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \cdots,$$

$$f(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

とすれば，(m, n) 行列

$$A=(\boldsymbol{a}_1\quad \boldsymbol{a}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{a}_n)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

が得られる．さらに $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$$

をとれば

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= x_1f(\boldsymbol{e}_1)+x_2f(\boldsymbol{e}_2)+\cdots+x_nf(\boldsymbol{e}_n) \\ &= x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}=A\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

よって，線形写像 $f:\ \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ が与えられたとき，$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ となる (m, n) 行列 A が存在する．この A を**線形写像 $\boldsymbol{f}$ に対応する行列**という．

したがって，$f:\ \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ が線形写像であるためには，$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ となる (m, n) 行列 A が存在することが必要十分である．

また，これを言い換えれば，次のようになる．

実 (m, n) 行列の全体からなる集合と，$\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^m$ への線形写像の全体からなる集合とは 1 対 1 に対応する．

例 12　$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$ で決まる $f:\ \boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^2$ に対応する行列は

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 13　$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ で決まる $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ に対応する行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である．このとき，f は平面上で $y = x$ に関する対称移動である．

例題 5.5　線形写像 $f: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^l$，$g: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ に対応する行列をそれぞれ A, B とするとき，次を示せ．

（1）　合成写像 $f \cdot g: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^l$ も線形写像で，$f \cdot g$ に対応する行列は AB になる．

（2）　$\operatorname{rank} AB \leqq \operatorname{rank} A$.

解答　（1）　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$，$c \in \boldsymbol{R}$ をとれば

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= f(g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = f(g(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{y})) \\ &= f(g(\boldsymbol{x}))+f(g(\boldsymbol{y})) = (f \cdot g)(\boldsymbol{x})+(f \cdot g)(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

$$(f \cdot g)(c\boldsymbol{x}) = f(g(c\boldsymbol{x})) = f(cg(\boldsymbol{x})) = cf(g(\boldsymbol{x})) = c(f \cdot g)(\boldsymbol{x})$$

よって，$f \cdot g$ は線形写像である．

次に，$(f \cdot g)(\boldsymbol{x}) = f(g(\boldsymbol{x})) = f(B\boldsymbol{x}) = A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$ であるから $f \cdot g$ には (l, n) 行列 AB が対応する．

（2）　定理 5.3 および $g(\boldsymbol{R}^n) \subset \boldsymbol{R}^m$ より

$$\begin{aligned}\operatorname{rank} AB &= \dim \operatorname{Im}(f \cdot g) = \dim f(g(\boldsymbol{R}^n)) \leqq \dim f(\boldsymbol{R}^m) \\ &= \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A.\end{aligned}$$

問 13　$\operatorname{rank} AB \leqq \operatorname{rank} B$ も同様に成り立つことを，5.1 節問 7 から得られる $\dim f(W) \leqq \dim W$ を用いて示せ．

問 14　線形写像 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$，$g: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ に対応する行列をそれぞれ A, B とする．写像 $f+g: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ および $cf: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ をそれぞれ

$$(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}) \qquad \text{および} \qquad (cf)(\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$$

で定義するとき，$f+g, cf$ は線形写像なること，およびこれらに対応する行列は

それぞれ $A+B$, cA になることを示せ.

◈ 表現行列 ◈

V, V' をそれぞれ n 次元，m 次元の実線形空間として，線形写像 $f: V \to V'$ を考える．V, V' の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}, \{\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \cdots, \boldsymbol{v}_m'\}$ をとって固定する．

実 (m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ が与えられたとする．V のベクトル

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n \qquad (x_1, x_2, \cdots, x_n \in \boldsymbol{R})$$

に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\boldsymbol{v}_i'$$

で定義される写像 $f: V \to V'$ は線形写像になる．

問 15　これを示せ．

逆に，$f: V \to V'$ を線形写像とする．$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は V' のベクトルであるから

$$f(\boldsymbol{v}_1) = a_{11}\boldsymbol{v}_1' + a_{21}\boldsymbol{v}_2' + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{v}_m'$$
$$f(\boldsymbol{v}_2) = a_{12}\boldsymbol{v}_1' + a_{22}\boldsymbol{v}_2' + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{v}_m'$$
$$\cdots\cdots$$
$$f(\boldsymbol{v}_n) = a_{1n}\boldsymbol{v}_1' + a_{2n}\boldsymbol{v}_2' + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{v}_m'$$

と表される．右辺のスカラーのつくる行列の転置行列である実 (m, n) 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を **f の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}, \{\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \cdots, \boldsymbol{v}_m'\}$ に関する表現行列**という．

注意　線形写像 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ の場合は，上の式は

$$(f(\boldsymbol{v}_1) \quad f(\boldsymbol{v}_2) \quad \cdots \quad f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{v}_1' \quad \boldsymbol{v}_2' \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_m')A$$

と書くこともできる．また，$\boldsymbol{R}^n$ と $\boldsymbol{R}^m$ のそれぞれの標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}, \{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \cdots, \boldsymbol{e}_m'\}$ に関する表現行列は f に対応する行列のことである．

また，123 ページで注意したように，複素線形空間と複素行列の関係も同じである．

例題 5.6 $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 \qquad - x_3 \end{pmatrix}$ で定義される線形写像 $f: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ の次の基底に関する表現行列 A を求めよ．

$$\boldsymbol{R}^3 \text{ の基底} \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \boldsymbol{R}^2 \text{ の基底} \left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

解答　f の定義より

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．表現行列は

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = a_{11}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = a_{12}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = a_{13}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix},$$

すなわち

$$\begin{cases} 5a_{11} + 2a_{21} = -3 \\ 3a_{11} + a_{21} = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} 5a_{12} + 2a_{22} = -2 \\ 3a_{12} + a_{22} = -7, \end{cases} \quad \begin{cases} 5a_{13} + 2a_{23} = 11 \\ 3a_{13} + a_{23} = 1 \end{cases}$$

を解いて

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -9 \\ -19 & 29 & 28 \end{pmatrix}.$$

問 16　$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ で定義される線形写像 $f:\ \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ の次の基底に関する表現行列を求めよ．

$$\boldsymbol{R}^2 \text{ の基底 } \left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \boldsymbol{R}^3 \text{ の基底 } \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

線形写像の表現行列は基底のとり方によって異なる．2 組の基底をとったとき，それぞれの表現行列の間にどのような関係があるかを考えれば，次の定理が得られる．

定理 5.4

$f:\ V \to V'$ を線形写像として V の 2 組の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ および V' の 2 組の基底 $\{\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \cdots, \boldsymbol{v}_m'\}$, $\{\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2', \cdots, \boldsymbol{u}_m'\}$ をとる．f の $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \cdots, \boldsymbol{v}_m'\}$ に関する表現行列を A，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$, $\{\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2', \cdots, \boldsymbol{u}_m'\}$ に関する表現行列を B とする．さらに $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ から $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ への基底変換の行列を P，$\{\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \cdots, \boldsymbol{v}_m'\}$ から $\{\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2', \cdots, \boldsymbol{u}_m'\}$ への基底変換の行列を Q とする．このとき

$$B = Q^{-1}AP.$$

証明　$A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$，$P = (p_{ij})$，$Q = (q_{ij})$ とする．このとき

$$f(\boldsymbol{v}_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\boldsymbol{v}_i' \qquad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

$$f(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{l=1}^{m} b_{lj}\boldsymbol{u}_l' \qquad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

$$\boldsymbol{u}_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj}\boldsymbol{v}_k \qquad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

$$\boldsymbol{u}_l' = \sum_{i=1}^{m} q_{il}\boldsymbol{v}_i' \qquad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad f \quad} & V' \\ \vdots & & \vdots \\ \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\} & \underline{\quad A \quad} & \{\boldsymbol{v}_1', \cdots, \boldsymbol{v}_m'\} \\ \downarrow P & & \downarrow Q \\ \{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\} & \underline{\quad B \quad} & \{\boldsymbol{u}_1', \cdots, \boldsymbol{u}_m'\} \end{array}$$

が成り立つ．$f(\boldsymbol{u}_j)$ を 2 通りに計算すれば

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}_j) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} p_{kj}\boldsymbol{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} f(\boldsymbol{v}_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} p_{kj}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\boldsymbol{v}_i'\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_{kj}\right)\boldsymbol{v}_i' \end{aligned}$$

$$f(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{l=1}^{m} b_{lj}\boldsymbol{u}_l{}' = \sum_{l=1}^{m} b_{lj}\left(\sum_{i=1}^{m} q_{il}\boldsymbol{v}_i{}'\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{m} q_{il}b_{lj}\right)\boldsymbol{v}_i{}'$$

基底 $\{\boldsymbol{v}_1{}', \boldsymbol{v}_2{}', \cdots, \boldsymbol{v}_m{}'\}$ は1次独立であるから，係数を比較して

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_{kj} = \sum_{l=1}^{m} q_{il}b_{lj}.$$

この左辺は AP の (i, j) 成分，右辺は QB の (i, j) 成分を表しているから $AP = QB$．したがって，$B = Q^{-1}AP$． ▩

例題 5.7　定理 5.4 を用いて，例題 5.6 を解け．

解答　f に対応する行列，すなわち $\boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{R}^2$ の標準基底に関する表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ から $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ への基底変換の行列は $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ から $\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ への基底変換の行列は $Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

である．したがって

$$B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -12 & -9 \\ -19 & 29 & 28 \end{pmatrix}.$$

問 17　$f:\ \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ を $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ で決まる線形写像とするとき，f の

$\boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ に関する表現行列を求めよ．

◈ 線形変換 ◈

n 次元線形空間 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ をとり固定する．V の線形変換 f: $V \to V$ に対して

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1) &= a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{v}_n \\ f(\boldsymbol{v}_2) &= a_{12}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{v}_n \\ &\cdots\cdots \\ f(\boldsymbol{v}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{v}_1 + a_{2n}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{v}_n \end{aligned}$$

で決まる n 次行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を **$\boldsymbol{f}$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する表現行列**という．これは f: $V \to V'$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}, \{\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \cdots, \boldsymbol{v}_m'\}$ に関する表現行列で，$V = V'$，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\} = \{\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \cdots, \boldsymbol{v}_m'\}$ としたものである．

このとき，定理 5.4 から次の定理を得る．

定理 5.5

V の線形変換 f に対して，V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する表現行列を A，別の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関する表現行列を B とする．また，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ から $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ への基底変換の行列を P とする．このとき，

$$B = P^{-1}AP.$$

例題 5.8　$\boldsymbol{C}^3$ の線形変換 $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$ に対して，次の基底に関する表現行列を求めよ．

$$\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} \right\} \quad (\omega^3 = 1,\ \omega \neq 1)$$

解答　f の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に関する表現行列は

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{から}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

また，$\boldsymbol{C}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ から $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ への基底変換の行列は，

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ で与えられる．

$\omega^2+\omega+1 = 0$ を用いれば $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$ であるから

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

V の線形変換 f が同型写像であるとき，f を**正則変換**ということがある．なぜこのように呼ばれるかは，次の定理による．

定理 5.6

$\boldsymbol{R}^n$ の線形変換 f が正則変換になるための必要十分条件は，f に対応する行列 A が正則行列になることである．

証明　定理 3.6，定理 5.2 および定理 5.3 から

$$f\text{ が同型写像} \Longleftrightarrow f\text{ は全単射}$$
$$\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{o}\}\text{ および } \operatorname{Im} f = \boldsymbol{R}^n$$
$$\Longleftrightarrow n = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} f = \operatorname{rank} A \Longleftrightarrow A\text{ は正則行列.}$$ ■

定理 5.6 の証明から，$\boldsymbol{R}^n$ の線形変換 f について，次が成り立つ．

$$f\text{ は全射} \Longleftrightarrow f\text{ は単射}$$

例 14　$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ で決まる f は $\boldsymbol{R}^2$ の正則変換で，逆写像 f^{-1} に対応する行列は $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である．

問 18　f が $\boldsymbol{R}^n$ の正則変換で対応する行列を A とすれば，f の逆写像 f^{-1} に対応する行列は A^{-1} であることを示せ．

問 19　$f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす $\boldsymbol{R}^2$ の線形変換 f に対応する行列を求めよ．

問 20　V を 2 次以下の多項式全体からなる線形空間とする．

（1）　多項式 $f(x)$ にその導関数 $f'(x)$ を対応させる写像 D は V の線形変換になることを示せ．また，$\operatorname{Im} D, \operatorname{Ker} D$ は何か．

（2）　D の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する表現行列を求めよ．

練 習 問 題 5

［**A**］

1.　次の写像は線形写像になるかどうか調べよ．

（1）　$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 1 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$　　（2）　$f(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$

（3）　$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$　　（4）　$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ix_2 \\ ix_3 \\ ix_1 \end{pmatrix}$

2. n 次実行列（$n \geqq 2$）の全体からなる線形空間 M_n から $\boldsymbol{R}$ への写像 f および g をそれぞれ

$$f(A)=|A|, \qquad g(A)=\mathrm{tr}(A)$$

で決めると f と g は線形写像になるか．

3. 平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ を原点のまわりに θ だけ回転して得られる点を $\mathrm{P}'(x', y')$ とする．このとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ で決まる写像 f は $\boldsymbol{R}^2$ の線形変換になることを示し，f に対応する行列を求めよ．

4. 次の行列に対応する線形写像の像と核のそれぞれの基底を求めよ．

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$　　（3）$\begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 0 & 1 & -i \\ 1 & 2i & 3 \end{pmatrix}$

5. $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ で決まる $\boldsymbol{R}^4$ の線形変換 f について，f の像と核のそれぞれの基底および f のランクを求めよ．

6. 次の行列に対応する線形写像 f は全射であるか単射であるかを調べよ．

（1）$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　（3）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ を，それぞれ $\boldsymbol{R}^2$ のベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ にうつす線形写像 $f: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ に対応する行列を求めよ．

8. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ に対応する線形写像 $f: \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ について

（1）$\mathrm{Ker}\, f, \mathrm{Im}\, f$ のそれぞれの次元と1組の基底を求めよ．

（2）$\boldsymbol{R}^4$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$，$\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ に関する f の表現行列を求めよ．

9. 次の $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換に対応する行列および基底 $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ に関する

表現行列を求めよ．

（1）$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_2+x_3 \\ x_1+x_3 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x_1-x_2+x_3 \\ x_1+3x_3 \\ -x_1+2x_2 \end{pmatrix}$

10. $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1-x_2-x_3 \\ -2x_2+x_3 \\ 2x_1+3x_2-4x_3 \end{pmatrix}$$

は正則変換であることを示し，f^{-1} に対応する行列を求めよ．

11. $\boldsymbol{C}^3$ の線形変換 f が $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -i \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -i \end{pmatrix}$ を満たすとき，f に対応する行列を求めよ．

12. $\dim V = 3$ として，V の線形変換 f の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ に関する表現行列を $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，f の基底 $\{\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1\}$ に関する表現行列を求めよ．

13. 2 次以下の多項式の全体からなる線形空間の線形変換 T を

$$T(f(x)) = 3f(x)+2f(0)x$$

で決めるとき，T の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する表現行列を求めよ．

[**B**]

1. 写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ が $g \cdot f = 1_X$ を満たせば，f は単射で g は全射になることを示せ．さらに，$f \cdot g = 1_Y$ も満たせば，f と g はともに全単射で $f = g^{-1}$ が成り立つことを示せ．

2. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする．V' の任意のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対して，$f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を満たす線形写像 $f: V \to V'$ がただ 1 つ存在することを示せ．

3. $f: V \to V'$ が線形写像のとき，V のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ に対して

$$f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \cdots, f(\boldsymbol{a}_r) \text{ が 1 次独立} \Longrightarrow \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \text{ が 1 次独立}$$

を示せ．また，この逆はどのような条件のもとで成り立つか．

4. 問 14 を用いることにより，(m, n) 行列 A, B に対して，次を示せ．

$$\mathrm{rank}\,(A+B) \leqq \mathrm{rank}\,A+\mathrm{rank}\,B$$

5. 行列のランクに関して，次を示せ．

（1）　A が (l, m) 行列，B が (m, n) 行列のとき

$$\text{rank}\,A + \text{rank}\,B - m \leqq \text{rank}\,(AB)$$

（2）　A が (m, n) 行列，P が m 次正則行列，Q が n 次正則行列のとき

$$\text{rank}\,PA = \text{rank}\,A, \qquad \text{rank}\,AQ = \text{rank}\,A.$$

6.　2 次の行列からなる線形空間 M_2 において，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，写像 f : $M_2 \to M_2$ を

$$f(X) = AX - XA$$

で定義する．このとき，f は M_2 の線形変換になることを示し，$\text{Ker}\,f$ の次元と基底を求めよ．

7.　実 (m, n) 行列全体からなる線形空間は $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^m$ への線形写像の全体からなる線形空間に同型になることを示せ．

8.　線形写像 f : $V \to V'$ に対して，V と V' の基底を適当に選べば，f のこれらの基底に関する表現行列として $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ $(r = \text{rank}\,A)$ がとれることを証明せよ（第 3 章練習問題［B］5 と比較せよ）．

9.　n 次正方行列 A が $A^2 = A$ を満たすとき（この A を**べき等行列**という），

$$W_1 = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\}, \qquad W_2 = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$

とおけば，次が成り立つことを示せ．

（1）　$\boldsymbol{R}^n = W_1 \oplus W_2$　（第 4 章練習問題［B］10 を参照）

（2）　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ $(r = \text{rank}\,A)$ となる n 次正則行列 P が存在する

（3）　$\text{tr}\,A = \text{rank}\,A$

10.　有限次元実線形空間 V から $\boldsymbol{R}$ への線形写像の全体を V^* で表す．

（1）　V^* は線形空間になることを示せ（この V^* を V の**双対空間**という）．

（2）　V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ に対して，$\boldsymbol{v}_i{}^*$: $V \to \boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{v}_i{}^*(\boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ で定めるとき，$\{\boldsymbol{v}_1{}^*, \boldsymbol{v}_2{}^*, \cdots, \boldsymbol{v}_n{}^*\}$ は V^* の基底になることを示せ．

6

内積空間

6.1 内　　積

◈内積空間◈

実線形空間 V の2つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，実数 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が定まり，次の条件を満たすとき，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積**という．

（1）$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$

（2）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

（3）$(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$　$(c \in \boldsymbol{R})$

（4）$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0$,　等号は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ のときに限る．

V が複素線形空間の場合は，内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ のとる値は複素数として，上の4つの条件のうち（2），（4）はそのままにして，（1），（3）をそれぞれ次の（1）′，（3）′ でおきかえる．このときの内積をとくに**エルミート内積**ともいう．

（1）′　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$

（3）′　$(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$　$(c \in \boldsymbol{C})$

内積が定義された線形空間を**内積空間**または**計量線形空間**という．スカラーが実数であるか複素数であるかをとくに区別したいときは，それぞれ**実内積空間**，**複素内積空間**（または**ユニタリ空間**）という．

内積の定義から

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{o}) = (\boldsymbol{o}, \boldsymbol{a}) = 0$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$$

$$(\boldsymbol{a}, c\boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \quad (c \in \boldsymbol{R})$$

$$(\boldsymbol{a}, c\boldsymbol{b}) = \overline{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \quad (c \in \boldsymbol{C})$$

が成り立つ.

問1　これらを示せ.

例1　4.1節の幾何ベクトルの内積は(1)〜(4)を満たすから，幾何ベクトル全体からなる線形空間は内積空間である.

例2　$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3$$

と定義すれば，これは $\boldsymbol{R}^3$ の内積になる.

例3　$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

と定義すれば，内積になる．この内積を $\boldsymbol{R}^n$ の**標準的内積**という.

このとき，A を n 次実正方行列とすれば

$$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, {}^tA\boldsymbol{b})$$

が成り立つ．実際,

$$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t(A\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = ({}^t\boldsymbol{a}{}^tA)\boldsymbol{b} = {}^t\boldsymbol{a}({}^tA\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, {}^tA\boldsymbol{b}).$$

例4　$I=[a, b]$ で連続な関数全体のつくる線形空間 $C(I)$ のときは,

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \qquad (f, g \in C(I))$$

と定義すれば，これは $C(I)$ の内積になる.

例題 6.1　$\boldsymbol{C}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\,\overline{\boldsymbol{b}} = a_1\overline{b_1}+a_2\overline{b_2}+\cdots+a_n\overline{b_n}$$

と定義すれば，これは $\boldsymbol{C}^n$ の内積になることを証明せよ．

解答　エルミート内積の 4 条件が成り立つことをいえばよい．

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{C}^n$ および複素数 c をとれば

(1)′　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1\overline{b_1}+a_2\overline{b_2}+\cdots+a_n\overline{b_n}$

$$= \overline{\overline{a_1}b_1}+\overline{\overline{a_2}b_2}+\cdots+\overline{\overline{a_n}b_n} = \overline{\overline{a_1}b_1+\overline{a_2}b_2+\cdots+\overline{a_n}b_n}$$

$$= \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$$

(2)　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (a_1+b_1)\overline{c_1}+\cdots+(a_n+b_n)\overline{c_n}$

$$= (a_1\overline{c_1}+\cdots+a_n\overline{c_n})+(b_1\overline{c_1}+\cdots+b_n\overline{c_n})$$

$$= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

(3)′　$(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ca_1\overline{b_1}+ca_2\overline{b_2}+\cdots+ca_n\overline{b_n} = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(4)　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = a_1\overline{a_1}+a_2\overline{a_2}+\cdots+a_n\overline{a_n}$

$$= |a_1|^2+|a_2|^2+\cdots+|a_n|^2 \geqq 0.$$

等号は $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ のとき成り立つ．

例題 6.1 より $\boldsymbol{C}^n$ は複素内積空間になる．このエルミート内積を $\boldsymbol{C}^n$ の**標準的内積**という．

注意　例 2 と例 3 からもわかるように，線形空間での内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ の定義の仕方は 1 通りではない．内積の条件を満たしさえすればよいわけである．しかしながら，今後とくに断らない限り，$\boldsymbol{R}^n$ および $\boldsymbol{C}^n$ における内積は標準的内積をさすものとする．

例 5　$\boldsymbol{C}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} i \\ 2-i \\ -i \end{pmatrix}$ に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = i(-i)+(1+i)(2+i)+i = 2+4i.$$

問 2　例 2，例 3，例 4 を示せ．
問 3　n 次の実行列 A, B と $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, B\boldsymbol{b})$ が成り立てば，$B = {}^tA$ であることを示せ．

線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0$ であるから

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

をベクトル $\boldsymbol{a}$ の**長さ**または**ノルム**という．

$\|\boldsymbol{a}\| \geqq 0$ であって，等号は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ のときに限る．また，c をスカラーとすれば

$$\|c\boldsymbol{a}\| = |c|\,\|\boldsymbol{a}\|$$

が成り立つ．

例 6　$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ に対して，$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{4^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{29}$.

$\boldsymbol{C}^2$ のベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ に対して，$\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{|i|^2+|1+2i|^2} = \sqrt{6}$.

幾何ベクトルの場合と同様に次が成り立つ．

定理 6.1

ベクトルの長さについて，次が成り立つ．

（1）　$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|$　（**シュヴァルツの不等式**）

（2）　$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$　（**3 角不等式**）

証明　複素内積空間の場合に証明する．

（1）　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ のときは，$0 \leqq \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|$ であるから成立する．$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0$ とする．t を実数とすると，内積の性質から

$$\begin{aligned}0 \leqq \|\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t\|^2 &= (\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t,\ \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t) \\ &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t)+((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t, \boldsymbol{a}) \\ &\quad +((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t) \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2+2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\overline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}t+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\overline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}\|\boldsymbol{b}\|^2t^2.\end{aligned}$$

任意の実数 t に対して，不等式

$$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2 t^2 + 2|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|^2 t + \|\boldsymbol{a}\|^2 \geqq 0$$

が成り立つので，判別式 D をとれば

$$D/4 = |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|^4 - |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|^2 \|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2 \leqq 0.$$

したがって，$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|^2 \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2$ となり（1）の不等式は成り立つ．

（2） $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 \leqq (\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2$ を示す．

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \overline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\ &\leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\ &\leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2 = (\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2.\end{aligned}$$

■

注意　実内積空間の場合のシュヴァルツの不等式の証明は，次のように考えればよい．

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ のときは等号が成り立つから $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ とする．任意の実数 t に対して

$$\begin{aligned}0 \leqq \|\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}\|^2 &= (\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}) \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2 t^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})t + \|\boldsymbol{b}\|^2.\end{aligned}$$

したがって，$D/4 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2 \leqq 0$.

実内積空間の $\boldsymbol{o}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，シュヴァルツの不等式

$$-\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \leqq (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

から

$$-1 \leqq \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \leqq 1.$$

よって

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$$

を満たす $\theta\,(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ がただ1つ定まる．幾何ベクトルと同じくこの θ をベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**なす角**という．$\theta = \pi/2$ に限って，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ である．

このことから，一般の内積空間においても，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する**といい，$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ で表す．

零ベクトルはすべてのベクトルと直交するものと考える．

例 7　$\boldsymbol{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\4\\1\end{pmatrix}$ に対して，$\|\boldsymbol{a}\|=3\sqrt{2}$, $\|\boldsymbol{b}\|=3\sqrt{2}$, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=9$. よって，$\cos\theta=\dfrac{9}{3\sqrt{2}\,3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$ であるから，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ は $\pi/3$ である.

問 4　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}5\\-2\\a\end{pmatrix}$ のとき，$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{33}$ となるように a を定めよ.

問 5　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-2i\\1+3i\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2+i\\i\end{pmatrix}$ のとき，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$, $\|\boldsymbol{a}\|$, $\|\boldsymbol{b}\|$ を計算せよ.

◈ 正規直交基底 ◈

内積空間 V における $\boldsymbol{o}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ のどの 2 つも直交しているとき，すなわち

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)=0 \qquad (i \neq j,\ 1 \leqq i, j \leqq r)$$

が成り立つとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は**直交系**であるという.

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ がすべて単位ベクトルであり，しかも直交系であるとき，すなわち

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\0 & (i\neq j)\end{cases}$$

が成り立つとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は**正規直交系**であるという.

また，V の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ が正規直交系であるとき，この基底を V の**正規直交基底**という.

例 8　$\boldsymbol{R}^3$ の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ は直交系である.

例 9　$\boldsymbol{R}^n$ および $\boldsymbol{C}^n$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は正規直交基底である.

例題 6.2　直交系 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立になることを示せ.

解答　スカラー $c_1, c_2, \cdots, c_r$ に対して，1 次関係式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$$

が成り立つとする. $1 \leqq j \leqq r$ である j について

$$\begin{aligned} 0 = (\boldsymbol{o}, \boldsymbol{a}_j) &= (c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_j) \\ &= c_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_j) + c_2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_j) + \cdots + c_r(\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_j) \\ &= c_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_j) = c_j\|\boldsymbol{a}_j\|^2. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}_j \neq \boldsymbol{o}$ であるから，$c_j = 0$. これがすべての $j\,(1 \leqq j \leqq r)$ について成り立つから，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立である.

問 6　$[-\pi, \pi]$ で連続な関数全体のつくる線形空間に例 4 の内積を定めれば，

$$1,\quad \cos x,\quad \sin x,\quad \cos 2x,\quad \sin 2x,\quad \cdots,\quad \cos nx,\quad \sin nx$$

は直交系になることを示せ.

問 7　$\boldsymbol{R}^3$ の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ が直交系になるように x, y, z を定めよ.

n 次元内積空間 V の与えられた 1 組の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ から，以下のようにして，V の正規直交基底を構成することができる. 正規直交系を構成していくこの方法を**グラム-シュミットの直交化**という.

$\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1$ とすると，$\|\boldsymbol{u}_1\| = 1$. $\boldsymbol{u}_2{}' = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$ とおけば，$\boldsymbol{u}_2{}' \neq \boldsymbol{o}$ で $(\boldsymbol{u}_2{}', \boldsymbol{u}_1) = (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1) - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1)(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) = 0$. そこで，$\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{u}_2{}'\|}\boldsymbol{u}_2{}'$ とおくと，$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 0$，$\|\boldsymbol{u}_2\| = 1$. 次に

$$\boldsymbol{u}_3{}' = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_3{}'\|}\boldsymbol{u}_3{}'$$

とおけば，同様に $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3) = (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 0$，$\|\boldsymbol{u}_3\| = 1$.

以下，この操作を繰り返す．すなわち，

$$\boldsymbol{u}_k{}' = \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{u}_k = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_k{}'\|}\boldsymbol{u}_k{}' \qquad (k = 2, 3, \cdots, n)$$

とおけば，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V の正規直交基底になる．

したがって，次の定理が得られたことになる．

定理 6.2

有限次元内積空間には正規直交基底が存在する．

例題 6.3　(1)　$\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対して，グラム-シュミットの直交化を行い，正規直交基底をつくれ．

(2)　$\boldsymbol{C}^2$ の基底 $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ から，(1) と同様にして正規直交基底をつくれ．

解答　(1)　$\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}\boldsymbol{a}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2{}' &= \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 5/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{u}_2{}'\|}\boldsymbol{u}_2{}' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_3{}' &= \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{5}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-5}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{u}_3'\|}\boldsymbol{u}_3' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

したがって，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底である．

（2） $\|\boldsymbol{b}_1\| = \sqrt{|i|^2+1} = \sqrt{2}$ より $\boldsymbol{w}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}\boldsymbol{b}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{w}_2' = \boldsymbol{b}_2 - (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1+i\end{pmatrix} - \frac{1+2i}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dfrac{i}{2}\\ \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

よって，$\|\boldsymbol{w}_2'\| = \sqrt{\left|-\dfrac{i}{2}\right|^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\boldsymbol{w}_2 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_2'\|}\boldsymbol{w}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}$.

したがって，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ は $\boldsymbol{C}^2$ の正規直交基底である．

問 8　例題 6.3（1）のベクトルの順序を

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

のように変えて，この順に正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ をつくって例題と比べよ．

問 9　$\boldsymbol{R}^4$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ から正規直交基底をつくれ．

◈ 直交補空間 ◈

内積空間 V の部分空間 W に対して，W のすべてのベクトルと直交する V のベクトルの全体，すなわち

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{a} \in V \mid 任意の\ \boldsymbol{w} \in W\ に対して\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}) = 0\}$$

は V の部分空間である．実際，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W^{\perp}$ とスカラー c をとれば

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{w}) = 0+0 = 0$$
$$(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}) = c\cdot 0 = 0 \qquad (\boldsymbol{w} \in W)$$

となるから，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ c\boldsymbol{a} \in W^{\perp}$.

この部分空間 $W^{\perp}$ を W の**直交補空間**という.

例題 6.4　ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ で生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間 $W=\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ の直交補空間 $W^{\perp}$ を求めよ.

解答　$W^{\perp}$ のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ に対して，$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{b}$ より

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 \qquad\quad = 0 \\ -x_1 \qquad\quad + x_3+2x_4 = 0 \end{cases}.$$

この同次連立1次方程式を解けば

$$x_1 = c_1+2c_2,\quad x_2 = -2c_1-c_2,\quad x_3 = c_1,\quad x_4 = c_2.$$

よって，$W^{\perp}=\left\langle \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$.

問 10　内積空間 V の部分空間 W, W_1, W_2 に対して，次を示せ.
　（1）　$W \cap W^{\perp}=\{\boldsymbol{o}\}$　　　（2）　$W_1 \supset W_2 \iff W_1{}^{\perp} \subset W_2{}^{\perp}$

6.2 直 交 行 列

◈ 直交行列 ◈

実数を成分とする n 次正方行列 A が

$${}^tAA = A\,{}^tA = E$$

を満たすとき，A を**直交行列**という.

A が直交行列のとき，定義より A は正則行列で $A^{-1}={}^tA$ が成り立つ.

このことから直交行列とは定義の式の一方，たとえば ${}^tAA = E$ が成り立つ行列であるといってもよい．

このとき，$|A|^2 = |{}^tA|\,|A| = |{}^tAA| = |E| = 1$ であるから，$|A| = \pm 1$ となる．

例 10 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ はいずれも直交行列である．

問 11　A, B が直交行列のとき，A^{-1} および AB も直交行列になることを示せ．
問 12　2 次の直交行列は例 10 の 2 種類しかないことを示せ．

定理 6.3

n 次実行列 A と $\boldsymbol{R}^n$ の内積に対して，次の 4 条件は同値である．

（1）　A は直交行列である．

（2）　$\|A\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a}\|$　$(\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n)$

（3）　$(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n)$

（4）　A の列ベクトル表示 $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{a}_n)$ において，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底である．

証明　（1）$\Longrightarrow$（2）　${}^tAA = E$ であるから

$$\|A\boldsymbol{a}\|^2 = (A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, {}^tAA\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{a}\|^2.$$

よって，$\|A\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a}\|$.

（2）$\Longrightarrow$（3）　仮定から

$$\|A(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\|^2 - \|A(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\|^2 = \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2.$$

この左辺は

$$\begin{aligned}
&(A\boldsymbol{a}+A\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{a}+A\boldsymbol{b}) - (A\boldsymbol{a}-A\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{a}-A\boldsymbol{b}) \\
&= \|A\boldsymbol{a}\|^2 + 2(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}) + \|A\boldsymbol{b}\|^2 - (\|A\boldsymbol{a}\|^2 - 2(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}) + \|A\boldsymbol{b}\|^2) \\
&= 4(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}).
\end{aligned}$$

右辺は同様に展開して $4(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ になるから，$(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

（3）$\Longrightarrow$（4）　$\boldsymbol{R}^n$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ に対して，$A\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_1$，$A\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$A\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{a}_n$ であるから

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = (A\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}.$$

よって，例題 6.2 より $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は 1 次独立であるから，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底になる．

（4）$\Longrightarrow$（1）

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}, \qquad \boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

から $a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \delta_{ij}$．この両辺は ${}^tAA$ および E の (i, j) 成分を表すことから ${}^tAA = E$．　▩

例 11　例題 6.3（1）でつくったベクトルからなる行列

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ は直交行列である．

実内積空間 V の線形変換 $f: V \to V$ が

$$(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \qquad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V)$$

を満たすとき，f を**直交変換**という．

例 12　$\boldsymbol{R}^2$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ は直交変換である．

実際，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とすれば，$f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$，$f(\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$ であるから $(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})) = a_2b_2 + (-a_1)(-b_1) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$．

n 次実行列 A に対応する $\boldsymbol{R}^n$ の線形変換，すなわち $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で決まる $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ に対して，定理 6.3 から容易に次の定理が得られる：

定理 6.4

n 次実行列 A に対応する $\boldsymbol{R}^n$ の線形変換 f に対して

$$A \text{ が直交行列} \iff f \text{ が直交変換.}$$

例題 6.5 $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a(2x_1+2x_2-x_3) \\ b(x_1-x_2) \\ c(x_1+x_2+4x_3) \end{pmatrix}$$

が直交変換となるように，正数 a, b, c の値を定めよ．

解答 $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a & 2a & -a \\ b & -b & 0 \\ c & c & 4c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ より f に対応する表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 2a & -a \\ b & -b & 0 \\ c & c & 4c \end{pmatrix}$$

である．f が直交変換になるためには，A が直交行列であればよい．そのためには，定理 6.3 より A の各列ベクトルが $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底になればよいから

$$4a^2+b^2+c^2 = 1, \qquad a^2+16c^2 = 1,$$
$$4a^2-b^2+c^2 = 0, \qquad -2a^2+4c^2 = 0.$$

したがって，求める値は $a = 1/3$, $b = 1/\sqrt{2}$, $c = 1/3\sqrt{2}$.

（${}^tA$ が直交行列になることから，$9a^2 = 1$, $2b^2 = 1$, $18c^2 = 1$ を計算してもよい．）

問 13 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が実内積空間 V の正規直交基底のとき，f が V の直交変換になるためには，$\{f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \cdots, f(\boldsymbol{a}_n)\}$ が正規直交基底になることが必要十分である．このことを示せ．

◈ユニタリ行列◈

複素数を成分とする n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して，各成分 a_{ij} の共役複素数 $\overline{a_{ij}}$ を成分にもつ行列の転置行列 $A^*={}^t\overline{A}$ を A の随伴行列という(1.3 節参照)。

また，$A^*A=AA^*=E$ を満たす行列 A を**ユニタリ行列**という．

例 13　$A=\begin{pmatrix}1+i & -2i\\ 3 & 5+2i\end{pmatrix}$ のとき，$A^*=\begin{pmatrix}1-i & 3\\ 2i & 5-2i\end{pmatrix}$.

問 14　ユニタリ行列 A の行列式の絶対値は 1 で，$A^*=A^{-1}$ となることを示せ．

実ユニタリ行列は直交行列である．そこで，定理 6.3 と類似の次の定理が成り立つ．

定理 6.5

n 次複素行列 A と $\boldsymbol{C}^n$ の内積に対して，次の 4 条件は同値である．

（1）　A はユニタリ行列である．

（2）　$\|A\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{a}\|$　$(\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{C}^n)$

（3）　$(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in\boldsymbol{C}^n)$

（4）　A の列ベクトル表示 $A=(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}_n)$ において，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は $\boldsymbol{C}^n$ の正規直交基底である．

例 14　例題 6.3（2）でつくったベクトルからなる行例 $\begin{pmatrix}i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ はユニタリ行列で，その行列式は i である．

複素内積空間 V の線形変換 f: $V\to V$ が

$$(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}))=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\qquad(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in V)$$

を満たすとき，f を**ユニタリ変換**という．

直交変換の場合と同様に，n 次複素行列 A に対応する $\boldsymbol{C}^n$ の線形変換 f に対

して，次が成り立つ：

$$A \text{ がユニタリ行列} \Longleftrightarrow f \text{ がユニタリ変換.}$$

問 15 定理 6.5 を証明せよ．

問 16 $\boldsymbol{C}^n$ の内積について，$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, A^*\boldsymbol{b})$ が成り立つことを示せ．

問 17 $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 & -a+bi \\ a+bi & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{C}^2$ のユニタリ変換になるように正の整数 a, b を定めよ．

例題 6.6 複素正則行列 A は適当なユニタリ行列 U と正則な上 3 角行列 T によって

$$A = UT$$

と書けることを証明せよ．

解答 複素行列 A の列ベクトル表示 $A = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n)$ において $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は，A は正則であるから $\boldsymbol{C}^n$ の基底である．この基底からグラム-シュミットの直交化法により正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ をつくれば，つくり方から

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_j \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_j \rangle \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

が成り立つ．とくに，各 j について $\boldsymbol{a}_j \in \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_j \rangle$ であるから，t_{ij} を複素数として

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = t_{11}\boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 = t_{12}\boldsymbol{u}_1 + t_{22}\boldsymbol{u}_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ \boldsymbol{a}_n = t_{1n}\boldsymbol{u}_1 + t_{2n}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{nn}\boldsymbol{u}_n \qquad (t_{11}, t_{22}, \cdots, t_{nn} \neq 0) \end{cases}$$

と表される．すなわち

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n)$$

$$= (\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & t_{nn} \end{pmatrix}$$

定理 6.5 より $U = (\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_n)$ はユニタリ行列で，

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & t_{nn} \end{pmatrix}$$ とおけば，$A = UT$ となる．

問 18　$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}$ を例題6.6のように $A = UT$ と表せ（例題6.3(2)参照）．

$A^* = A$ となる正方行列を**エルミート行列**という．

実エルミート行列は実対称行列である．

例 15　$\begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 4 & 1-2i & 3+i \\ 1+2i & 0 & -6i \\ 3-i & 6i & -1 \end{pmatrix}$ はいずれもエルミート行列である．このようにエルミート行列の対角成分は実数になる．

問 19　エルミート行列の対角成分および行列式は実数になることを示せ．

練習問題 6

[A]

1.　$\boldsymbol{R}^n$ の2つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について，次が成り立つことを示せ．

(1)　$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2+\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2)$

(2)　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \iff \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2$

(3)　$\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| \iff (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = 0$

2.　$\boldsymbol{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1 \quad a_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

と定義すれば，これは $\boldsymbol{R}^2$ の内積になることを示せ．

3. 次の各組のベクトルを正規直交化せよ.

(1) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. 次の $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間の 1 組の正規直交基底を求めよ.

(1) $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\7\end{pmatrix}\right\rangle$　(2) $W_2 = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\, x_1+x_2+x_3=0\right\}$

5. $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を内積空間 V の正規直交基底とする. このとき, V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2+\cdots+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{u}_n$$

と表されることを示せ. さらに, V のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{u}_n, \qquad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{u}_1+b_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{u}_n$$

と表すとき, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ となることを示せ.

6. 2 次以下の実数係数の多項式全体からなる線形空間 V における内積を

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

で定義するとき

(1) $f(x) = x^2+x+1$, $g(x) = ax-1$ が直交するように a を定めよ.

(2) $f(x) = x^2+bx+c$ のとき, $\|f\|$ の最小値とそのときの b, c の値を求めよ.

(3) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ から正規直交基底をつくれ.

7. $\boldsymbol{C}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}i\\1\\i\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\1+i\\i\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix}-i\\2-i\\0\end{pmatrix}$ について

(1) $\|\boldsymbol{a}\|, \|\boldsymbol{b}\|, \|\boldsymbol{c}\|, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を求めよ.

(2) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が $\boldsymbol{C}^3$ の基底になることを示し, 正規直交化せよ.

8. $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle$, $W_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+i\\1\\-i\end{pmatrix}\right\rangle$ の $\boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{C}^3$ でのそれぞれの直交補空間を求めよ.

9. $\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}$ は直交行列であることを示せ.

10. $\begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & a \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & b \\ 2/3 & 0 & c \end{pmatrix}$ が直交行列になるように a, b, c を定めよ．

11. 直交変換は単射写像であることを示せ．

12. 第1行が $\left(\dfrac{2}{3} \quad \dfrac{1}{3} \quad \dfrac{2}{3}\right)$ であるような3次直交行列，第1行が $(1 \quad -i \quad 1)$ であるような3次ユニタリ行列をそれぞれ1つ求めよ．

13. $\begin{pmatrix} \dfrac{1+2i}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ a & b \end{pmatrix}$ がユニタリ行列になるように，a, b の値を定めよ．

14. A, B がエルミート行列のとき

$$AB \text{ はエルミート行列} \iff AB = BA$$

を証明せよ．

15. A, B がエルミート行列のとき，$A+B, AB+BA$ もエルミート行列になることを示せ．

16. $\boldsymbol{C}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ が単位ベクトルのとき，$E-2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^*$ はユニタリ行列になることを示せ．

17. $A = B+iC$ で B, C がエルミート行列のとき

$$AA^* = A^*A \iff BC = CB$$

が成り立つことを示せ．

[**B**]

1. 実 (m, n) 行列全体からなる線形空間 $M_{m,n}$ に

$$(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB) \qquad (A, B \in M_{m,n})$$

とすれば，(A, B) は内積になることを示せ．また，複素行列のつくる線形空間の内積を同様な形で定義せよ．

2. M_2 に前問のように内積を定義するとき

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

のなす角を求めよ．

3. 内積空間 V のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対して，内積を成分にもつ行列

$$G = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_n) \\ & \cdots\cdots & & \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，

$$|G| \neq 0 \iff \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{ は1次独立}$$

を証明せよ．

4. 有限次元内積空間 V の部分空間 W とその直交補空間 $W^\perp$ に対して

$$V = W \oplus W^\perp, \qquad \dim V = \dim W + \dim W^\perp, \qquad (W^\perp)^\perp = W$$

を示せ．

5. 有限次元内積空間 V の部分空間 W_1, W_2 に対して，次を示せ．

（1）$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$

（2）$(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$

6. $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ について，$W = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ とするとき，$\boldsymbol{c}$ の W と $W^\perp$ への直和分解を求めよ．

7. $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対して，$W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$，$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{a}_n)$ とする．このとき，$W^\perp$ は同次連立 1 次方程式 ${}^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解空間になることを示せ．

8. A, B が n 次実行列のとき，次を示せ．

$$A + iB \text{ がユニタリ行列} \iff \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \text{ が直交行列．}$$

9. 2 次のユニタリ行列はすべて

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -e^{i\theta}\bar{\beta} & e^{i\theta}\bar{\alpha} \end{pmatrix} \qquad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \ \ \theta \in \boldsymbol{R})$$

の形で表されることを示せ．

10. n 次エルミート行列の全体は実線形空間になるが，複素線形空間にならないことを証明せよ．

11. 正方行列が $A = -A^*$ を満たし（このときの A を**交代エルミート行列**という），$E + A$ が正則ならば，$(E - A)(E + A)^{-1}$ はユニタリ行列になることを示せ．

12. 複素内積空間 V の線形変換 f が

$$(f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{b})) \qquad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V)$$

を満たすとき，f を V の**エルミート変換**という．V の正規直交基底に関する f の表現行列を A とするとき，次を示せ．

$$f \text{ はエルミート変換} \iff A \text{ はエルミート行列．}$$

13. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ を内積空間 V の正規直交系とするとき，V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i)|^2 \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2$$

を証明せよ．

7

行列の標準化

7.1　固有値と固有ベクトル

◈固有値と固有ベクトル◈

V を一般の n 次元複素線形空間とし，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする．V のベクトル $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ に対して，n 項列ベクトル

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を対応させる写像 ψ: $V \to \boldsymbol{C}^n$ は V から $\boldsymbol{C}^n$ への同型写像になる．f: $V \to V$ を V の線形写像とし，f の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する表現行列を $A = (a_{ij})$ とする．

V のベクトル $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{o}$ と複素数 λ があり

(＊)　　　$f(\boldsymbol{p}) = \lambda \boldsymbol{p}$

を満たすとき，λ を線形写像 f の**固有値**，$\boldsymbol{p}$ を固有値 λ に対する f の**固有ベクトル**という．

同型写像 ψ: $V \to \boldsymbol{C}^n$ を通して，条件（＊）を行列の言葉を用いて表すと

(＊＊)　　　$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となる．ここで $\boldsymbol{p} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ である．

逆に n 次正方行列 A が先に与えられたとする．このとき，複素数 λ と n 次列ベクトル

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

が条件 (∗∗) を満たせば，λ を行列 A の**固有値**，$\boldsymbol{p}$ を固有値 λ に対する A の**固有ベクトル**という．したがって

$$\begin{aligned} \lambda \text{ が線形写像 } f \text{ の固有値} &\iff \lambda \text{ が行列 } A \text{ の固有値} \\ &\iff \text{同次連立 1 次方程式} \\ &\qquad (\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \\ &\qquad \text{が非自明解 } \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{o} \text{ をもつ} \\ &\iff |\lambda E - A| = 0 \quad (\text{定理 3.5 より}) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで λ を変数と見て

$$\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

と置くと，$\phi_A(\lambda)$ は λ の n 次多項式になる．これを A の**固有多項式**という．また，$\phi_A(\lambda) = 0$ を A の**固有方程式**という．定理 1.6 より

$$\phi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

と，1 次式の積に分解される．したがって，次の定理を得る．

定理 7.1

（1） n 次正方行列 A の固有値は重複度をこめて n 個あり，それは固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ の解全体 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ と一致する．

（2） 固有値 λ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ は，同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

の非自明解のことである．

行列の固有値とトレースおよび行列式の間には次の関係がある．

定理 7.2

n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とするとき，次が成り立つ．

（1）　$\mathrm{tr}\,A = \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

（2）　$|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

（3）　行列 A が正則 $\Longleftrightarrow$ A は 0 を固有値に持たない

証明

$$\phi_A(\lambda) = |\lambda E-A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

の λ^{n-1} の係数は，$|\lambda E-A|$ を展開すると

$$-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}) = -\mathrm{tr}\,A$$

となる．一方，$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$ を展開すると

$$-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$$

となり，（1）を得る．（2）は上式の定数項を比較すればよい．（3）は，行列が正則であるための必要十分条件が，定理 2.13 より $|A| \neq 0$ であったから．　▩

注意　ここでは V を複素線形空間としたため，一般に A は複素行列になる．V として実線形空間をとると，A は実行列になる．しかし，A が実行列でも，A の固有値は必ずしも実数とは限らず複素数になることもある．固有値 λ が実数ならば，固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{R}^n$ からとれるが，複素数のとき $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{C}^n$ に属する．固有値，固有ベクトルを実数の範囲に制限するかどうかは，考えている問題の性質に依存する．

例 1　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2-\lambda+1 = 0$$

したがって，固有値は $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ と $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ となり，実数ではない．

例題 7.1　次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解答 行列 A の固有方程式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -2 & \lambda-1 & 1 \\ -2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2) = 0$$

したがって，A の固有値は $\lambda = 1, 2, -2$ である．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは

$$(1E-A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて，たとえば

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{一般には} \quad c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは

$$(2E-A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて，たとえば

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{一般には} \quad c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

固有値 $\lambda = -2$ に対する固有ベクトルは

$$(-2E-A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて，たとえば

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{一般には} \quad c_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_3 \neq 0)$$

行列 B が適当な正則行列 P を用いて $B=P^{-1}AP$ と書けるとき，A は B に**相似**であるといい $A\sim B$ と書く．この条件は，線形空間の言葉でいえば，定理 5.5 より基底の変換に対応している．

例題 7.2　行列 A が B に相似であれば，A と B の固有値は一致することを示せ．

解答　行列 A と B の固有多項式が一致することを示せばよい．

$$\begin{aligned}\phi_B(\lambda)&=|\lambda E-B|=|\lambda E-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|\\&=|P^{-1}|\,|\lambda E-A|\,|P|=|\lambda E-A|=\phi_A(\lambda)\end{aligned}$$

問 1　次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

（1）$\begin{pmatrix}1&2\\5&4\end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}$　（3）$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&0\\1&2&1\end{pmatrix}$

（4）$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$　（5）$\begin{pmatrix}3&2&-2\\-5&-4&2\\-3&-3&4\end{pmatrix}$

（6）$\begin{pmatrix}0&i&-1\\i&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$　（7）$\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&3&1&-1\\0&2&-1&-2\\0&0&1&2\end{pmatrix}$

問 2　A, B, C を n 次正方行列とするとき，次が成り立つことを示せ．

（1）$A\sim A$　（2）$A\sim B$　ならば　$B\sim A$

（3）$A\sim B,\ B\sim C$　ならば　$A\sim C$

問 3　上 3 角行列

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&O&&a_{nn}\end{pmatrix}$$

の固有値は，その対角成分 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ に等しいことを示せ．

問 4　n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とするとき，次の行列の固有値を求めよ．

（1）${}^tA$　（2）A^{-1}　（3）A^*

（4）$2A$　（5）$E-A$

問 5　$A=\begin{pmatrix}A_1&A_3\\O&A_2\end{pmatrix}$ を n 次正方行列とするとき，$\phi_A(\lambda)=\phi_{A_1}(\lambda)\phi_{A_2}(\lambda)$ が成り

立つことを示せ．ただし，A_1 は n_1 次正方行列，A_2 は n_2 次正方行列 ($n = n_1+n_2$) とする．

◈ 固有空間 ◈

A を n 次正方行列，λ を A の固有値とする．λ に対する固有ベクトル全体に，零ベクトル $\boldsymbol{o}$ を付け加えて得られる集合

$$V(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \mid (\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$

は $\boldsymbol{C}^n$ の部分空間になる．これを行列 A の固有値 λ に対する**固有空間**という．$V(\lambda)$ を $\boldsymbol{C}^n$ の部分空間と見て次元公式を用いると，次が成り立つ

$$\dim V(\lambda) = n - \text{rank}\,(\lambda E - A)$$

注意 A が実行列で固有値 λ も実数の場合，$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解空間を $\boldsymbol{R}^n$ 内で考えることができる．この場合，$V(\lambda)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間になる．

例題 7.3 次の行列の固有値と固有空間を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

解答 (1) 行列 A の固有値は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0$$

より，$\lambda = 2, 2, 1$ となる．

$\lambda = 2$ に対しては

$$(2E-A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解く．ここで $\text{rank}\,(2E-A) = 1$ より，$\dim V(2) = 2$ である．$2x_1 - x_2 - x_3 = 0$ を解いて

$$V(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

と表される．

$\lambda = 1$ に対しては

$$(1E-A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解く．ここで

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+①\times(-2)]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+②]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と変形できるから，$\operatorname{rank}(E-A) = 2$．したがって，$\dim V(1) = 1$ であり

$$V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

と表される．

（2）　行列 B の固有値は

$$\phi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 2 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0$$

より，$\lambda = 1, 1, 2$ となる．

$\lambda = 1$ に対しては

$$(1E-B)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解く．ここで

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{②+①\times(-2)\\ ③+①\times(-1)}]{} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+②\times(-1)]{} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

と変形できるから，rank $(E-B)=2$．したがって，$\dim V(1)=1$ であり

$$V(1)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

と表される．

$\lambda=2$ に対しては

$$(2E-B)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を解く．同様の計算から rank $(2E-B)=2$，$\dim V(2)=1$ となり

$$V(2)=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

と表される．

例題 7.3 (2) が示すように，必ずしも固有値 λ の重複度と $\dim V(\lambda)$ は等しくはならない．一般に次の不等式が成り立つ．

定理 7.3

n 次正方行列 A の固有多項式を重複度でまとめて

$$\phi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r}$$

$$\lambda_i\neq\lambda_j\quad(i\neq j),\qquad n=n_1+n_2+\cdots+n_r$$

と表すと，次が成り立つ．

$$1 \leqq d_i = \dim V(\lambda_i) \leqq n_i$$

証明　固有値の定義より，$\mathrm{rank}\,(\lambda_i E - A) \leqq n-1$ であるから，$1 \leqq d_i = \dim V(\lambda_i)$ を得る．$\{\boldsymbol{p}_1{}^i, \boldsymbol{p}_2{}^i, \cdots, \boldsymbol{p}_{d_i}{}^i\}$ を $V(\lambda_i)$ の基底とする．この基底を延長して（定理 4.9），$\boldsymbol{C}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{p}_1{}^i, \cdots, \boldsymbol{p}_{d_i}{}^i, \boldsymbol{q}_{d_i+1}, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ をつくる．

$$P = (\boldsymbol{p}_1{}^i \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_{d_i}{}^i \quad \boldsymbol{q}_{d_i+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n)$$

と置くと，P は n 次正則行列になる．そして

$$\begin{aligned}
P^{-1}(\lambda E - A)P &= \lambda E - P^{-1}AP \\
&= (\lambda \boldsymbol{e}_1 \quad \lambda \boldsymbol{e}_2 \quad \cdots \quad \lambda \boldsymbol{e}_n) \\
&\quad -(P^{-1}A\boldsymbol{p}_1{}^i \quad \cdots \quad P^{-1}A\boldsymbol{p}_{d_i}{}^i \quad P^{-1}A\boldsymbol{q}_{d_i+1} \quad \cdots \quad P^{-1}A\boldsymbol{q}_n) \\
&= (\lambda \boldsymbol{e}_1 \quad \lambda \boldsymbol{e}_2 \quad \cdots \quad \lambda \boldsymbol{e}_n) \\
&\quad -(P^{-1}\lambda_i\boldsymbol{p}_1{}^i \quad \cdots \quad P^{-1}\lambda_i\boldsymbol{p}_{d_i}{}^i \quad P^{-1}A\boldsymbol{q}_{d_i+1} \quad \cdots \quad P^{-1}A\boldsymbol{q}_n) \\
&= (\lambda \boldsymbol{e}_1 \quad \lambda \boldsymbol{e}_2 \quad \cdots \quad \lambda \boldsymbol{e}_n) \\
&\quad -(\lambda_i\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \lambda_i\boldsymbol{e}_{d_i} \quad P^{-1}A\boldsymbol{q}_{d_i+1} \quad \cdots \quad P^{-1}A\boldsymbol{q}_n) \\
&= ((\lambda-\lambda_i)\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad (\lambda-\lambda_i)\boldsymbol{e}_{d_i} \quad \lambda\boldsymbol{e}_{d_i+1} - P^{-1}A\boldsymbol{q}_{d_i+1} \\
&\quad \cdots \quad \lambda\boldsymbol{e}_n - P^{-1}A\boldsymbol{q}_n)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $P^{-1}P = E$ の第 j 列を比較して，$P^{-1}\boldsymbol{p}_j{}^i = \boldsymbol{e}_j\,(1 \leqq j \leqq d_i)$ が成り立つことを用いた．両辺の行列式をとると

$$\begin{aligned}
|\lambda E - A| &= |P^{-1}(\lambda E - A)P| \\
&= |(\lambda-\lambda_i)\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad (\lambda-\lambda_i)\boldsymbol{e}_{d_i} \quad \lambda\boldsymbol{e}_{d_i+1} - P^{-1}A\boldsymbol{q}_{d_i+1} \quad \cdots \\
&\quad \lambda\boldsymbol{e}_n - P^{-1}A\boldsymbol{q}_n| \\
&= (\lambda-\lambda_i)^{d_i}\,|\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_{d_i} \quad \lambda\boldsymbol{e}_{d_i+1} - P^{-1}A\boldsymbol{q}_{d_i+1} \quad \cdots \\
&\quad \lambda\boldsymbol{e}_n - P^{-1}A\boldsymbol{q}_n|
\end{aligned}$$

となり $\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda-\lambda_i)^{d_i}\psi(\lambda)$ と表される．ここで $\psi(\lambda) = |\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_{d_i} \quad \lambda\boldsymbol{e}_{d_i+1} - P^{-1}A\boldsymbol{q}_{d_i+1} \quad \cdots \quad \lambda\boldsymbol{e}_n - P^{-1}A\boldsymbol{q}_n|$ は λ の $n-d_i$ 次式となり，$d_i \leqq n_i$ を得る．　▩

定理 7.4

n 次正方行列 A の相異なる固有値に対する固有ベクトルは1次独立である．

証明　$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ を A の相異なる固有値とし，$V(\lambda_i) \ni \boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{o}$ $(1 \leqq i \leqq s)$ を固有ベクトルとする．

帰納法で証明する．$s = 1$ の場合，$c_1\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{o}$ ならば $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{o}$ より $c_1 = 0$ となる．$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1} = \boldsymbol{o}$ ならば $c_1 = c_2 = \cdots = c_{s-1} = 0$ が成り立つと仮定する．このとき

$$(*) \qquad c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1} + c_s\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{o}$$

が成立するのは，$c_1 = c_2 = \cdots = c_s = 0$ のときに限ることをいえばよい．

$(*)$ の両辺に左から A をかけると

$$\begin{aligned} &c_1A\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{s-1}A\boldsymbol{x}_{s-1} + c_sA\boldsymbol{x}_s \\ (**) \qquad &= \lambda_1c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_{s-1}c_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1} + \lambda_sc_s\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

となる．$(**)$ から $\lambda_s \times (*)$ を引くと

$$(\lambda_1 - \lambda_s)c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (\lambda_{s-1} - \lambda_s)c_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1} = \boldsymbol{o}$$

を得る．仮定より $(\lambda_j - \lambda_s)c_j = 0$ $(1 \leqq j \leqq s-1)$ が成り立つ．また $\lambda_j \neq \lambda_s$ $(1 \leqq j \leqq s-1)$ であるから，$c_j = 0$ $(1 \leqq j \leqq s-1)$ となる．したがって，$c_s\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{o}$ となり，$c_s = 0$ を得る．■

問 6　次の各行列の固有空間 $V(2)$ を求めよ．

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7.2 行列の対角化

n 次正方行列 A に対して，適当な n 次正則行列 P をとり，$P^{-1}AP$ をできるだけ簡単な形に表すことを考える．このことを一般に行列の**標準化**という．

とくに $P^{-1}AP$ が対角行列，すなわち

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とできるとき，A は**対角化可能**という．また，A は P により**対角化される**という．

この両辺に行列 $P = (\boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{p}_n)$ を左からかけると

$$\begin{aligned} PP^{-1}AP = A(\boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{p}_n) &= (A\boldsymbol{p}_1 \ \ A\boldsymbol{p}_2 \ \ \cdots \ \ A\boldsymbol{p}_n) \\ &= (\boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1\boldsymbol{p}_1 \ \ \lambda_2\boldsymbol{p}_2 \ \ \cdots \ \ \lambda_n\boldsymbol{p}_n) \end{aligned}$$

を得る．したがって，$A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i\boldsymbol{p}_i \ (1 \leqq i \leqq n)$ となり，各 λ_i は A の固有値，$\boldsymbol{p}_i$ は λ_i に対する固有ベクトルとなる．P が正則行列であることは，列ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ が1次独立であることを意味する．

定理 7.5

n 次正方行列 A に対して，次の条件は同値である．

（1） A は対角化可能である．

（2） n 個の1次独立な A の固有ベクトルが存在する．

（3） $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ を A のすべての相異なる固有値とするとき

$$n = \dim V(\lambda_1) + \cdots + \dim V(\lambda_r)$$

が成り立つ．

証明 （1）と（2）が同値であることはすでに示した．固有値 λ_i の重複度を n_i とし，$d_i = \dim V(\lambda_i)$ とおくと，定理 7.3 より

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r \geqq d_1 + d_2 + \cdots + d_r$$

が成り立つ．

$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ を n 個の 1 次独立な A の固有ベクトルとする．このうち $V(\lambda_i)$ に属するベクトルの個数を h_i とすると $d_i \geqq h_i$ である．したがって

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_r \geqq h_1 + h_2 + \cdots + h_r = n$$

となり，（2）から（3）が出る．逆を示すには，各 $V(\lambda_i)$ から基底 $\{\boldsymbol{p}_1{}^i, \boldsymbol{p}_2{}^i, \cdots, \boldsymbol{p}_{d_i}{}^i\}$ をとるとき，$\{\boldsymbol{p}_1{}^1, \cdots, \boldsymbol{p}_{d_1}{}^1, \boldsymbol{p}_1{}^2, \cdots, \boldsymbol{p}_{d_2}{}^2, \cdots, \boldsymbol{p}_1{}^r, \cdots, \boldsymbol{p}_{d_r}{}^r\}$ が 1 次独立であることをいえばよい．

$$c_1{}^1\boldsymbol{p}_1{}^1 + \cdots + c_{d_1}{}^1\boldsymbol{p}_{d_1}{}^1 + \cdots + c_1{}^r\boldsymbol{p}_1{}^r + \cdots + c_{d_r}{}^r\boldsymbol{p}_{d_r}{}^r = \boldsymbol{o}$$

と表されたとすると，$c_1{}^i\boldsymbol{p}_1{}^i + \cdots + c_{d_i}{}^i\boldsymbol{p}_{d_i}{}^i \in V(\lambda_i)$ より

$$c_1{}^i\boldsymbol{p}_1{}^i + \cdots + c_{d_i}{}^i\boldsymbol{p}_{d_i}{}^i = \boldsymbol{o} \qquad (1 \leqq i \leqq r)$$

となる．$\boldsymbol{p}_1{}^i, \boldsymbol{p}_2{}^i, \cdots, \boldsymbol{p}_{d_i}{}^i$ は $V(\lambda_i)$ の基底であるから，$c_j{}^i = 0\,(1 \leqq i \leqq r,\ 1 \leqq j \leqq d_i)$ となる． ▩

定理 7.4 と定理 7.5 を合わせると次を得る．

定理 7.6

n 次正方行列 A の固有値がすべて相異なれば，A は対角化可能である．

注意 行列を対角化する行列 P は，固有ベクトルのとり方に自由度があるため一意的には決まらない．また，対角線に並ぶ固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ の順番は固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ の順番と一致する．

例題 7.4 正則行列 P を求め，次の行列 A を対角化せよ．また，これを用いて $A^k\,(k = 1, 2, \cdots)$ を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

解答 与えられた行列は例題 7.3（1）の行列 A と一致する．したがって，そ

こで求めた固有値，固有ベクトルを用いて

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

と置くと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と対角化される．ここで

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} A^k &= P(P^{-1}A^kP)P^{-1} = P(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)P^{-1} \\ &= P(P^{-1}AP)^kP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^k+2 & 2^k-1 & 2^k-1 \\ 0 & 2^k & 0 \\ -2^{k+1}+2 & 2^k-1 & 2^{k+1}-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．

例 2　例題 7.3 (2) の行列 B は，$\dim V(1)+\dim V(2) = 2 < 3$ より対角化可能でない．

問 7　次の行列 A が対角化可能ならば，正則行列 P を求め対角化せよ．また，A^k

を求めよ．

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ i & 3 \end{pmatrix}$　（3）$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

（4）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　（5）$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

（6）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　（7）$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ 3 & 12 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

問8　$N \neq O$ であるべき零行列 N は対角化可能でないことを示せ．

問9　べき等行列 A に対して，次を示せ．

（1）A の固有値はすべて 0 または 1 である．

（2）A は対角化可能である．

7.3 行列の3角化

◈行列の3角化◈

前節の例2でわかるように，任意の正方行列は必ずしも対角化可能ではない．その場合，対角行列に近いものとして上3角行列が考えられる．正方行列 A が，適当な正則行列 U をとり

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と上3角行列に変形できるとき，A は**3角化可能**という．また，A は U で**3角化される**という．このとき，$\phi_A(\lambda) = \phi_{U^{-1}AU}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$ より，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ は A の固有値になる．

定理 7.7

n 次正方行列 A は3角化可能である．このとき，U としてユニタリ行列をとることができる．とくに A が実行列でその固有値がすべて実数ならば，U として直交行列をとることができる．

証明　n に関する帰納法で証明する．$n=1$ のときは，$A=(a_{11})$ で $U=(1)$，$\lambda=a_{11}$ として成り立つ．$n-1$ 次の正方行列に対して定理が成り立つとして，A を n 次正方行列とする．

λ_1 を A の1つの固有値とし，λ_1 に対する長さ1の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ をとる．基底の延長を行い，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $\boldsymbol{C}^n$ の基底とする．ここで定理6.2の証明で用いたグラム-シュミットの直交化を考えれば，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を正規直交基底と仮定してよい．このとき，$U_1=(\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_n)$ はユニタリ行列となり

$$\begin{aligned} U_1^{-1}AU_1 &= U_1^{-1}(A\boldsymbol{u}_1 \quad A\boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad A\boldsymbol{u}_n) \\ &= U_1^{-1}(\lambda_1\boldsymbol{u}_1 \quad A\boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad A\boldsymbol{u}_n) \\ &= (\lambda_1\boldsymbol{e}_1 \quad U_1^{-1}A\boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad U_1^{-1}A\boldsymbol{u}_n) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \end{aligned}$$

となる．ここで，$U_1^{-1}U_1=E$ の第1列を比較して $U_1^{-1}\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{e}_1$ となることを用いた．B は $n-1$ 次行列なので，仮定より $n-1$ 次ユニタリ行列 U_2 があり

$$U_2^{-1}BU_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & & * \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とできる．このとき

$$U = U_1\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

と置けば，U はユニタリ行列となり

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&U_2^{-1}&\\0&&&\end{pmatrix}U_1^{-1}AU_1\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&U_2&\\0&&&\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&U_2^{-1}&\\0&&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&*&\cdots&*\\0&&&\\\vdots&&B&\\0&&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&U_2&\\0&&&\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&*\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\O&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

と上3角行列になる．

行列 A が実行列でその固有値がすべて実数ならば，固有ベクトルをすべて実ベクトルからとることができる．このとき，U は実ユニタリ行列すなわち直交行列となる． ▨

注意 行列 A の固有多項式を固有値の重複度でまとめて

$$\phi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r}$$

と表す．このとき，固有値の順番を $\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,\cdots,\lambda_r$ と指定すれば，定理 7.7 の証明から次の形に3角化される．

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\overbrace{\lambda_1\ \cdots\ \lambda_1}^{n_1}&&&*\\&\overbrace{\lambda_2\ \cdots\ \lambda_2}^{n_2}&&\\&&\ddots&\\O&&&\overbrace{\lambda_r\ \cdots\ \lambda_r}^{n_r}\end{pmatrix}$$

◈3角化の応用◈

行列の3角化を応用すると，いくつかの定理を導くことができる．λ の多項式 $f(\lambda) = c_0\lambda^m + c_1\lambda^{m-1} + \cdots + c_{m-1}\lambda + c_m$ の変数 λ に，n 次正方行列 A を代入して得られる行列

$$f(A) = c_0A^m + c_1A^{m-1} + \cdots + c_{m-1}A + c_mE$$

を A の**行列多項式**という．

定理 7.8（フロベニウス）

> n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とするとき，行列多項式 $f(A)$ の固有値は $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ である．

証明　A の3角化

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，$U^{-1}A^kU = U^{-1}AUU^{-1}A\cdots AUU^{-1}AU = (U^{-1}AU)^k$ より

$$U^{-1}f(A)U = f(U^{-1}AU)$$

$$= \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & * \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

と3角化される．したがって，$U^{-1}f(A)U$，すなわち $f(A)$ の固有値は $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ となる．■

定理 7.9（ハミルトン-ケーリー）

> n 次正方行列 A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ に対して，$\phi_A(A) = O$ が成り立つ．

証明　定理 7.8 と同様に考えて，A を3角行列

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と仮定してよい．このとき，$\phi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$ の λ に A を代入すると

$$\phi_A(A) = (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E)\cdots(A - \lambda_n E)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & & * \\ & \lambda_2 - \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & & & * \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\cdots \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_n & & & * \\ & \lambda_2 - \lambda_n & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 0 \end{pmatrix}$$

となり，左から行列をかけていくと第1列，第2列，…，第 n 列が順番に零ベクトルになることが確かめられる．したがって，$\phi_A(A) = O$ となる． ■

例 3 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有多項式は $\phi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$ であるから，$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$ が成り立つ．

例題 7.5 n 次正方行列 A がべき零となるための必要十分条件は，A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ がすべて0であることを示せ．また，n 次べき零行列 N の固有多項式は $\phi_N(\lambda) = \lambda^n$ となることを示せ．

解答 A をべき零行列とし，$A^r = O$ が成り立つとする．定理7.8より A^r の固有値は $\lambda_1{}^r, \lambda_2{}^r, \cdots, \lambda_n{}^r$ となる．しかし，$A^r = O$ より，$\lambda_1{}^r, \lambda_2{}^r, \cdots, \lambda_n{}^r$ は零行列 O の固有値となり $\lambda_i{}^r = 0$．したがって，$\lambda_i = 0\ (1 \leqq i \leqq n)$ を得る．

逆に，A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ がすべて0とすると，A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n) = \lambda^n$$

となる．定理 7.9 より $\phi_A(A) = A^n = O$ となり，A はべき零行列になる．後半は明らか．

例題 7.6　次の行列 A に対して，$A^6-2A^5-A^4$ を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

解答　A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^3-3\lambda^2+\lambda+1$$

である．ここで

$$\lambda^6-2\lambda^5-\lambda^4 = (\lambda^3-3\lambda^2+\lambda+1)(\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1)+\lambda^2-2\lambda-1$$

より

$$\begin{aligned} A^6-2A^5-A^4 &= \phi_A(A)(A^3+A^2+A+E)+A^2-2A-E \\ &= A^2-2A-E \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.4　実対称行列の対角化

◈ 実対称行列 ◈

定理 7.10

実対称行列 A の固有値はすべて実数である．

証明　A は実対称行列より $\overline{A} = A$，${}^tA = A$ を満たす．λ を A の固有値とし，

$\boldsymbol{p}$ を λ に対する A の固有ベクトルとする．このとき，6.1 節例 3 より $(A\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{p}, A\boldsymbol{p})$ が成り立つ．また

$$(A\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}) = (\lambda\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}) = \lambda(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})$$
$$(\boldsymbol{p}, A\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{p}, \lambda\boldsymbol{p}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})$$

より，$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}) \neq 0$ であることに注意すれば，$\lambda = \bar{\lambda}$ すなわち λ は実数となる．

■

定理 7.11

実対称行列 A は，適当な直交行列 T により

$$T^{-1}AT = {}^tTAT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

証明　定理 7.7 より，A は適当な直交行列 T をとり

$$T^{-1}AT = {}^tTAT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と 3 角化できる．このとき両辺の転置をとると

$${}^t({}^tTAT) = {}^tTAT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる．2 つの行列を比較すると，$*$ の部分の行列の成分はすべて 0 となるので，A は T で対角化された．　■

例題 7.7　実対称行列の相異なる固有値に対する固有ベクトルは，互いに直交することを示せ．

解答　A を実対称行列とし，λ_1, λ_2 をその相異なる固有値とする．λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ をとると

$$\begin{aligned}\lambda_1(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) &= (\lambda_1\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = (A\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)\\ &= (\boldsymbol{p}_1, A\boldsymbol{p}_2) = (\boldsymbol{p}_1, \lambda_2\boldsymbol{p}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)\end{aligned}$$

が成り立つ．$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるから $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = 0$ となり，$\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ は直交する．

例題 7.8　次が成り立つことを示せ．

（1）　ユニタリ行列の固有値はすべて絶対値 1 の複素数である．

（2）　ユニタリ行列の相異なる固有値に対する固有ベクトルは，互いに直交する．

解答　U をユニタリ行列とし，λ をその固有値，$\boldsymbol{p}$ を λ に対する固有ベクトルとする．このとき定理 6.5 より

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}) = (U\boldsymbol{p}, U\boldsymbol{p}) = (\lambda\boldsymbol{p}, \lambda\boldsymbol{p}) = \lambda\overline{\lambda}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})$$

となる．$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}) \neq 0$ より $|\lambda|^2 = \lambda\overline{\lambda} = 1$，すなわち $|\lambda| = 1$ を得る．

次に（2）を示す．λ_1, λ_2 を U の相異なる固有値，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ を λ_1, λ_2 に対する固有ベクトルとする．したがって，$U\boldsymbol{p}_1 = \lambda_1\boldsymbol{p}_1$，$U\boldsymbol{p}_2 = \lambda_2\boldsymbol{p}_2$．ここで $U^{-1} = U^*$ より，$\boldsymbol{p}_2 = \lambda_2 U^*\boldsymbol{p}_2$ となる．さらに（1）の結果より $U^*\boldsymbol{p}_2 = \lambda_2^{-1}\boldsymbol{p}_2 = \overline{\lambda}_2\boldsymbol{p}_2$ となる．

$$\begin{aligned}\lambda_1(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) &= (\lambda_1\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = (U\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)\\ &= (\boldsymbol{p}_1, U^*\boldsymbol{p}_2) = (\boldsymbol{p}_1, \overline{\lambda}_2\boldsymbol{p}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)\end{aligned}$$

となり，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であったから $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = 0$ を得る．

例 4　$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は 2 次の直交行列，したがって，2 次のユニタリ行列である．固有方程式は

$$\phi_U(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \lambda-\cos\theta \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\cos\theta\,\lambda + 1 = 0$$

したがって，固有値は

$$\lambda = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$$

である．$\lambda = e^{i\theta}$ に対する固有ベクトルは

$$(e^{i\theta}E - A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & e^{i\theta} - \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて，たとえば

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる．固有値 $\lambda = e^{-i\theta}$ に対する固有ベクトルも，同様にして

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

がとれる．このとき，$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = {}^t\boldsymbol{p}_1\bar{\boldsymbol{p}}_2 = i\cdot 1 + 1\cdot(-i) = 0$ となる．

例題 7.9　次の実対称行列を直交行列を用いて対角化せよ．

（1）　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　　（2）　$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

解答　（1）　A の固有値は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

より，$\lambda = 1, 4, -1$ である．

$\lambda = 1$ に対する長さ 1 の固有ベクトルは

$$(1E - A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて，たとえば

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

がとれる．同様にして，$\lambda=4, -1$ に対する長さ1の固有ベクトルとしてそれぞれ

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

がとれる．例題7.7より $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ は正規直交基底になる．したがって，$T=(\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_3)$ とおくと T は直交行列になり

$${}^tTAT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

と A の対角化を得る．

（2）　B の固有値は

$$\phi_B(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda+1&1&-2\\1&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)^2=0$$

より，$\lambda=4, -2, -2$ である．

$\lambda=4$ に対する長さ1の固有ベクトルは

$$(4E-B)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&5&2\\-2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を解いて，たとえば

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$\lambda=-2$ に対しては

$$(-2E-B)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\1&-1&2\\-2&2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を解く．解空間である $V(-2)$ は2次元で，たとえば

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

ととれば，$V(-2)=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$ と表される．ここで

$$\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{u}/\|\boldsymbol{u}\|=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

と置くと，長さが1の固有ベクトルになる．

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

は $\boldsymbol{p}_2$ に直交する．ここで

$$\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{v}'/\|\boldsymbol{v}'\|=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

と置くと，$\{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3\}$ は正規直交基底になる．そして行列 B は直交行列 $T=(\boldsymbol{p}_1\quad\boldsymbol{p}_2\quad\boldsymbol{p}_3)$ で

$${}^tTBT=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

と対角化される．

問10　次の実対称行列 A に対して，直交行列 T を求め対角化せよ．

（1）$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&3&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$　（3）$\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-2&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$

（4）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

◈エルミート行列の対角化◈

第6章で述べたように，$A^* = A$ を満たす複素行列をエルミート行列という．このとき次の定理が成り立つことが知られている．実対称行列の場合と同様にして証明できる．

定理 7.12

エルミート行列 A の固有値はすべて実数である．

定理 7.13

エルミート行列 A は適当なユニタリ行列 U を用いて対角化できる．

例題 7.10　エルミート行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ をユニタリ行列を用いて対角化せよ．

解答　A の固有値は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -i \\ i & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

より，$\lambda = 1, 3$ である．

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルで長さが1のものを求める．それには連立1次方程式

$$(1E-A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を条件 $|x_1|^2+|x_2|^2 = 1$ のもとで解けばよい．たとえば

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

がとれる．同様にして $\lambda=3$ に対する長さ 1 の固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

がとれる．異なる固有値に対する固有ベクトルはこの場合にも直交し，行列

$$U=(\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2)=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

はユニタリ行列となる．つくり方より

$$U^{-1}AU=U^{*}AU=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．

問 11　定理 7.12 と定理 7.13 を証明せよ．

問 12　交代行列の固有値はすべて純虚数，すなわち $ai\,(a\in\boldsymbol{R})$ の形に書けることを示せ．

7.5　2 次 形 式

n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する，実係数 2 次同次多項式

$$(*)\qquad Q(\boldsymbol{x})=Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の **2 次形式**という．ここで $a_{ij}=a_{ji}\,(1\leqq i, j\leqq n)$ とする．このとき，係数のつくる行列 $A=(a_{ij})$ は n 次実対称行列となる．そして

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と置くと，$Q(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$ と表される．

例 5　$Q(x_1, x_2, x_3)=x_1{}^2+2x_2{}^2-x_3{}^2+2x_1x_2-x_1x_3$

$$= (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

定理 7.14（2 次形式の標準形）

2 次形式（＊）は，適当な直交行列 T をとり，$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ と変数変換すると

$$Q'(\boldsymbol{y}) = Q(T\boldsymbol{y}) = \lambda_1 {y_1}^2 + \lambda_2 {y_2}^2 + \cdots + \lambda_n {y_n}^2$$

と表すことができる．ここで $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ は A の固有値である．

証明　定理 7.11 より，A は適当な直交行列 T を用いて対角化されるので

$$Q(\boldsymbol{x}) = Q(T\boldsymbol{y}) = {}^t(T\boldsymbol{y})AT\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y}({}^tTAT)\boldsymbol{y}$$

$$= (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 {y_1}^2 + \lambda_2 {y_2}^2 + \cdots + \lambda_n {y_n}^2$$

となる．▨

A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ のうち正の固有値の個数を p，負の固有値の個数を q とするとき，組 (p, q) を 2 次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ の**符号数**という．

例題 7.11　2 次形式

$$Q(\boldsymbol{x}) = Q(x_1, x_2, x_3)$$
$$= {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + {x_3}^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$
$$= (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

に対して

（1）　$Q(\boldsymbol{x})$ の標準形と符号数を求めよ．

（2）　$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1 \quad x_2 \quad x_3)$ が $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = 1$ を満たして動くとき，$Q(\boldsymbol{x})$ の最大値と最小値を求めよ．また，それを与える $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1 \quad x_2 \quad x_3)$ を求めよ．

解答　（1）　例題 7.9（1）より，行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値は $\lambda = 1, 4, -1$ である．行列 A を対角化する直交行列として

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

がとれる．$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ と変数変換すると

$$Q'(\boldsymbol{y}) = Q(T\boldsymbol{y}) = y_1{}^2 + 4y_2{}^2 - y_3{}^2$$

と標準形を得る．また，2 次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ の符号数は $(2, 1)$ である．

（2）　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (T\boldsymbol{y}, T\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ より，与えられた条件 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 1$ は

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 = 1$$

と同値である．したがって，不等式

$$-1 = -(y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2) \leqq y_1{}^2 + 4y_2{}^2 - y_3{}^2 \leqq 4(y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2) = 4$$

を得る．

ここで $y_1 = y_3 = 0$，$y_2 = \pm 1$ ととると，$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ より $x_1 = \pm 1/\sqrt{3}$，$x_2 = \pm 1/\sqrt{3}$，$x_3 = \pm 1/\sqrt{3}$（複号同順）となる．そして，この点で 2 次形式 $Q(x_1, x_2, x_3)$ は最大値 4 をとる．

同様にして $y_1 = y_2 = 0$，$y_3 = \pm 1$ ととると，$x_1 = \pm 1/\sqrt{2}$，$x_2 = 0$，$x_3 = \mp 1/\sqrt{2}$（複号同順）となり，この点で最小値 -1 をとる．

問 13　次の 2 次形式の標準形と符号数を求めよ．

（1）　$x_1{}^2 + x_2{}^2 + 3x_1x_2$

（2）　$x_1{}^2 + 2x_2{}^2 - x_3{}^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

（3）　$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$

問 14　$Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ に対して，次が成り立つことを示せ．

$$Q(\boldsymbol{x}) > 0 \ (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}) \Longleftrightarrow A \text{ の任意の固有値 } \lambda \text{ が } \lambda > 0 \text{ を満たす}$$

例題 7.12　2次曲線 $x^2+4xy-2y^2 = 6$ はどのような曲線を表すか．

解答　与えられた式を行列を用いて表すと

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6$$

となる．行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

の固有値は，2 と -3 である．$\lambda = 2$ と -3 に対する長さ1の固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

をそれぞれとることができる．したがって，$T = (\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2)$ とおくと T は直交行列となり，次を満たす．

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ と変数変換すると

$$(x \quad y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x' \quad y')\,{}^tTAT\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= (x' \quad y')\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2x'^2-3y'^2 = 6$$

となり

$$\frac{x'^2}{3}-\frac{y'^2}{2} = 1$$

すなわち，双曲線を表す．

問 15　次の 2 次曲面はどのような曲面を表すか．

（1）　$x^2+3y^2+2z^2+2xy-4yz=1$

（2）　$x^2+z^2-2xy-4xz-2yz=1$

7.6 ジョルダン標準形

◈広義固有空間◈

A を n 次正方行列とし，W を $\boldsymbol{C}^n$ の部分空間とする．W に属する任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $A\boldsymbol{x} \in W$ となるとき，部分空間 W は **A-不変**であるという．

行列 A の固有多項式を固有値の重複度でまとめて

（＊）　$$\phi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r}$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j), \qquad n = n_1+n_2+\cdots+n_r$$

と表す．固有値 $\lambda_i\,(1 \leqq i \leqq r)$ に対して

$$W(\lambda_i) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \mid (\lambda_i E - A)^k \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \text{ となる自然数 } k \text{ が存在}\}$$

は $\boldsymbol{C}^n$ の部分空間になる．これは固有空間 $V(\lambda_i)$ の拡張になり，固有値 λ_i に対する**広義固有空間**という．また，$W(\lambda_i)$ に属する $\boldsymbol{o}$ でないベクトルを，固有値 λ_i に対する**広義固有ベクトル**という．いま自然数 j に対して

$$W_j(\lambda_i) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \mid (\lambda_i E - A)^j \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$

と置くと包含関係

$$V(\lambda_i) = W_1(\lambda_i) \subset W_2(\lambda_i) \subset W_3(\lambda_i) \subset \cdots$$

が成り立つ．次元を考えれば，これは無限には続かず

$$W_1(\lambda_i) \subsetneqq W_2(\lambda_i) \subsetneqq \cdots \subsetneqq W_l(\lambda_i) = W_{l+1}(\lambda_i) = \cdots$$

となる．このとき $W(\lambda_i) = W_l(\lambda_i)$ である．

問 16　次が成り立つことを示せ．

（1）　$W_j(\lambda_i)$ は A-不変な $\boldsymbol{C}^n$ の部分空間になる．

（2）　$W_j(\lambda_i)$ は $(\lambda E - A)$-不変 $(\lambda \in \boldsymbol{C})$ な $\boldsymbol{C}^n$ の部分空間になる．

定理 7.15

A を n 次正方行列，その固有多項式を（＊）とする．このとき広義固有空間 $W(\lambda_i)$ $(1 \leqq i \leqq r)$ に対して，次が成り立つ．

（1）　$W(\lambda_i) \cap W(\lambda_j) = \{\boldsymbol{o}\}$　$(i \neq j)$

（2）　相異なる固有値に対する広義固有ベクトルは1次独立

（3）　$\dim W(\lambda_i) = n_i$

証明　（1）　$i \neq j$ のとき，$W(\lambda_i) \cap W(\lambda_j) \ni \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ となるベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在したとする．このとき

$$(\lambda_i E - A)^{k_1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o} \qquad \text{かつ} \qquad (\lambda_i E - A)^{k_1+1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

を満たす0以上の整数 k_1 がある．$\boldsymbol{y} = (\lambda_i E - A)^{k_1}\boldsymbol{x}$ と置くと

$$(\lambda_i E - A)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}, \qquad W(\lambda_i) \cap W(\lambda_j) \ni \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{o}$$

となる．$\boldsymbol{y} \in W(\lambda_j)$ より，$(\lambda_j E - A)^{k_2}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$ となる自然数 k_2 がある．しかし，$A\boldsymbol{y} = \lambda_i \boldsymbol{y}$ より $(\lambda_j E - A)^{k_2}\boldsymbol{y} = (\lambda_j - \lambda_i)^{k_2}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$ となるが，$i \neq j$ のとき $\lambda_i \neq \lambda_j$ としたからこれは矛盾である．

（2）　$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ を A の相異なる固有値とする．$W(\lambda_i) \ni \boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{o}$ $(1 \leqq i \leqq s)$ に対して

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_s\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{o} \text{ ならば，} c_1 = c_2 = \cdots = c_s = 0$$

が成り立つことを示す．以下帰納法を用いる．$s = 1$ の場合は明らか．

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1} = \boldsymbol{o} \qquad \text{のとき} \qquad c_1 = c_2 = \cdots = c_{s-1} = 0$$

が成り立つと仮定し，1次関係式

$$(**) \qquad c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_s\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{o}$$

が与えられたとする．$(\lambda_s E - A)^k\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{o}$ となる自然数 k をとり，$(**)$ の両辺に $(\lambda_s E - A)^k$ を左からかけると

$$\begin{aligned} c_1(\lambda_s E - A)^k\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{s-1}(\lambda_s E - A)^k\boldsymbol{x}_{s-1} + c_s(\lambda_s E - A)^k\boldsymbol{x}_s \\ = c_1(\lambda_s E - A)^k\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{s-1}(\lambda_s E - A)^k\boldsymbol{x}_{s-1} = \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

$W(\lambda_i)$ は $(\lambda_s E - A)$-不変より，$(\lambda_s E - A)^k\boldsymbol{x}_i \in W(\lambda_i)$ となる．また（1）より，$i \neq s$ のとき $\boldsymbol{x}_i \notin W(\lambda_s)$．したがって，$(\lambda_s E - A)^k\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{o}$ $(1 \leqq i \leqq s-1)$ となる．これより帰納法の仮定が使えて，$c_i = 0\,(1 \leqq i \leqq s-1)$ を得る．よって $c_s\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{o}$ となり，$c_s = 0$ もでる．

（3）（2）で示した1次独立性より

$$\dim W(\lambda_1) + \cdots + \dim W(\lambda_r) \leqq n$$

が成り立つ．また $n = n_1 + \cdots + n_r$ なので，（3）を示すには $n_i \leqq \dim W(\lambda_i)$ $(1 \leqq i \leqq r)$ をいえばよい．

行列 A は，定理 7.7 で述べた注意に従うと，ユニタリ行列 U を用いて次の形に 3 角化できる．

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}}^{n_1} & & & \huge{*} \\ & \overbrace{\begin{matrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2\end{matrix}}^{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ \huge{O} & & & \overbrace{\begin{matrix}\lambda_r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{matrix}}^{n_r} \end{pmatrix}$$

いま

$$V_1 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{C}^n \;\middle|\; x_i = 0 \ (n_1+1 \leqq i \leqq n) \right\}$$

と置くと，V_1 は $\boldsymbol{C}^n$ の n_1 次元部分空間になる．また，$B = U^{-1}AU$ の形より V_1 の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$(\lambda_1 E - B)^{n_1}\boldsymbol{x} = U^{-1}(\lambda_1 E - A)^{n_1}U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

が成り立つ．U は正則行列なので

$$(\lambda_1 E - A)^{n_1}U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

となる．したがって，$V_2 = \{U\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in V_1\}$ と置くと，V_2 は $W(\lambda_1)$ に含まれる n_1 次元の部分空間になり，不等式 $n_1 \leqq \dim W(\lambda_1)$ を得る．固有値の順番を入れかえて考えれば，$n_i \leqq \dim W(\lambda_i)$ $(1 \leqq i \leqq r)$ が成り立つ．▩

定理 7.16

A を n 次正方行列，その固有多項式を$(*)$とする．このとき A は適当な正則行列 P により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

の形に表される．ここで $A_i\,(1 \leqq i \leqq r)$ は n_i 次正方行列であり，その固有多項式は $\phi_{A_i}(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ である．

証明　$W(\lambda_i)$ から基底 $\boldsymbol{p}_1{}^i, \cdots, \boldsymbol{p}_{n_i}{}^i$ をとる．$W(\lambda_i)$ は A-不変なので

$$A\boldsymbol{p}_j{}^i = a_{1j}{}^i\boldsymbol{p}_1{}^i + \cdots + a_{n_ij}{}^i\boldsymbol{p}_{n_i}{}^i \qquad (1 \leqq j \leqq n_i)$$

と表される．ここで $A_i = (a_{jk}{}^i)$ と置くと，A_i は n_i 次正方行列である．定理7.15より

$$\{\boldsymbol{p}_1{}^1, \cdots, \boldsymbol{p}_{n_1}{}^1, \boldsymbol{p}_1{}^2, \cdots, \boldsymbol{p}_{n_2}{}^2, \cdots, \boldsymbol{p}_1{}^r, \cdots, \boldsymbol{p}_{n_r}{}^r\}$$

は $\boldsymbol{C}^n$ の基底となる．したがって

$$P = (\boldsymbol{p}_1{}^1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_{n_1}{}^1 \quad \boldsymbol{p}_1{}^2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_{n_2}{}^2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_1{}^r \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_{n_r}{}^r)$$

と置くと，P は正則行列になり

$$AP = P\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_r \end{pmatrix}$$

を満たす．この式の両辺に P^{-1} を左からかければ求める式を得る．

この関係を用いると

$$\begin{aligned}\phi_A(\lambda) = \phi_{P^{-1}AP}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r} \\ &= \phi_{A_1}(\lambda)\phi_{A_2}(\lambda)\cdots\phi_{A_r}(\lambda)\end{aligned}$$

となる．したがって，A_i の固有値が λ_i だけであることを示せば

$$\phi_{A_i}(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^{n_i}$$

が示される．A_i が $\lambda_j\,(j \neq i)$ を固有値として持ち，λ_j に対する固有ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_i} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

がとれたとする．すなわち，$A_i\boldsymbol{x} = \lambda_j\boldsymbol{x}$ とする．このとき

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \boldsymbol{x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} n_1+\cdots+n_{i-1} \\ \}n_i \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} n_{i+1}+\cdots+n_r \end{matrix}$$

と置くと，$\tilde{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{o}$ で $P^{-1}AP\tilde{\boldsymbol{x}} = \lambda_j\tilde{\boldsymbol{x}}$ を満たす．したがって，$\boldsymbol{o} \neq P\tilde{\boldsymbol{x}} = x_1\boldsymbol{p}_1{}^i + \cdots + x_{n_i}\boldsymbol{p}_{n_i}{}^i \in W(\lambda_i)$ は $AP\tilde{\boldsymbol{x}} = \lambda_jP\tilde{\boldsymbol{x}}$，つまり $(\lambda_jE-A)P\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{o}$ を満たす．しかし，これは $P\tilde{\boldsymbol{x}} \in W(\lambda_j)$ を意味し，定理 7.15（1）に矛盾する．　▩

◈ジョルダン標準形◈

次の形をした k 次正方行列を，複素数 α に対する k 次の**ジョルダン・ブロック**または**ジョルダン細胞**という．

$$J(\alpha, k) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & O \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & 1 \\ O & & & & \alpha \end{pmatrix}$$

例 6　$J(5,1) = (5)$,　$J(6,2) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$,　$J(5,3) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

問 17　A を3次正方行列とする．適当な正則行列 $P=(\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3)$ に対して

$$P^{-1}AP = J(\lambda, 3) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

であれば，$(A-\lambda E)\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{o}$，$(A-\lambda E)\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1$，$(A-\lambda E)\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2$ となることを示せ．

いくつかのジョルダン・ブロックを対角線に沿って並べて得られる行列

$$J = \begin{pmatrix} J(\alpha_1, k_1) & & & O \\ & J(\alpha_2, k_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(\alpha_l, k_l) \end{pmatrix}$$

を**ジョルダン行列**という．

以下の目標は，任意の n 次正方行列 A は適当な正則行列 P をとり $P^{-1}AP$ をジョルダン行列にできる（定理 7.18），を証明することである．このジョルダン行列を A の**ジョルダン標準形**という．

注意　対角行列は1次ジョルダン・ブロックを対角線に沿って並べたジョルダン行列である．

定理 7.17（べき零行列の標準形）

N をべき零な n 次正方行列とする．このとき適当な正則行列 P をとり

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J(0, k_1) & & & O \\ & J(0, k_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(0, k_l) \end{pmatrix}$$

$$n = k_1 + \cdots + k_l$$

と表すことができる．

証明　行列 N は $N^{k-1} \neq O$，$N^k = O$ を満たすとする．例題 7.5 より $k \leqq n$ である．ここで $W_j = W_j(0) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \mid N^j\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$ とおき，部分空間の列

$$V(0) = W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_k = \boldsymbol{C}^n$$

を考える．ここで

$$g_i = \dim W_i \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

$$h_k = g_k - g_{k-1}, \qquad h_k + h_{k-1} = g_{k-1} - g_{k-2}$$

$$h_k + h_{k-1} + h_{k-2} = g_{k-2} - g_{k-3}, \qquad \cdots$$

と置く．$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{h_k}$ を W_k に属する 1 次独立なベクトルで

$$\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{h_k} \rangle \cap W_{k-1} = \{\boldsymbol{o}\}$$

を満たすものとする．このとき次の kh_k 個のベクトル

$$(*) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x}_1, & N\boldsymbol{x}_1, & \cdots, & N^{k-1}\boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2, & N\boldsymbol{x}_2, & \cdots, & N^{k-1}\boldsymbol{x}_2 \\ & & \cdots\cdots & \\ \boldsymbol{x}_{h_k}, & N\boldsymbol{x}_{h_k}, & \cdots, & N^{k-1}\boldsymbol{x}_{h_k} \end{cases}$$

は 1 次独立になる．なぜならば

$$\sum_{i=1}^{h_k} c_i{}^0 \boldsymbol{x}_i + \sum_{i=1}^{h_k} c_i{}^1 N\boldsymbol{x}_i + \cdots + \sum_{i=1}^{h_k} c_i{}^{k-1} N^{k-1} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o}$$

が成り立つとする．このとき両辺に左から N^{k-1} をかけると，第 2 項以下の和は 0 となり

$$\sum_{i=1}^{h_k} c_i{}^0 N^{k-1} \boldsymbol{x}_i = N^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{h_k} c_i{}^0 \boldsymbol{x}_i\right) = \boldsymbol{o}$$

を得る．したがって，$\sum_{i=1}^{h_k} c_i{}^0 \boldsymbol{x}_i \in W_{k-1}$ となるが，仮定 $\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{h_k} \rangle \cap W_{k-1} = \{\boldsymbol{o}\}$ より $c_1{}^0 = \cdots = c_{h_k}{}^0 = 0$ でなければならない．以下この手続きを繰り返せば，$c_i{}^j = 0$（$i = 1, \cdots, h_k$, $j = 0, \cdots, k-1$）を得る．

次にベクトル $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_{h_{k-1}} \in W_{k-1}$ で

$$N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{h_k}, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_{h_{k-1}} \text{ は 1 次独立},$$

$$\langle N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{h_k}, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_{h_{k-1}} \rangle \cap W_{k-2} = \{\boldsymbol{o}\}$$

を満たすものをとる．（$*$）のベクトルと

$$(**) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{y}_1, & N\boldsymbol{y}_1, & \cdots, & N^{k-2}\boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2, & N\boldsymbol{y}_2, & \cdots, & N^{k-2}\boldsymbol{y}_2 \\ & & \cdots\cdots & \\ \boldsymbol{y}_{h_{k-1}}, & N\boldsymbol{y}_{h_{k-1}}, & \cdots, & N^{k-2}\boldsymbol{y}_{h_{k-1}} \end{cases}$$

を合わせたものも1次独立になる．

同様にベクトル $\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_{h_{k-2}} \in W_{k-2}$ で

$$N^2\boldsymbol{x}_1, \cdots, N^2\boldsymbol{x}_{h_k}, N\boldsymbol{y}_1, \cdots, N\boldsymbol{y}_{h_{k-1}}, \boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_{h_{k-2}} \text{ は1次独立,}$$

$$\langle N^2\boldsymbol{x}_1, \cdots, N^2\boldsymbol{x}_{h_k}, N\boldsymbol{y}_1, \cdots, N\boldsymbol{y}_{h_{k-1}}, \boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_{h_{k-2}}\rangle \cap W_{k-3} = \{\boldsymbol{o}\},$$

を満たすものをとる．以下この議論を繰り返すことができ，最終的に次のベクトル全体は $\boldsymbol{C}^n$ の基底になる．

$$W_k\left\{\begin{array}{l} \quad \boldsymbol{x}_1, \cdots, \quad \boldsymbol{x}_{h_k} \\ W_{k-1}\left\{\begin{array}{llllll} N\boldsymbol{x}_1, \cdots, & N\boldsymbol{x}_{h_k}, & \boldsymbol{y}_1, \cdots, & \boldsymbol{y}_{h_{k-1}} & & \\ N^2\boldsymbol{x}_1, \cdots, & N^2\boldsymbol{x}_{h_k}, & N\boldsymbol{y}_1, \cdots, & N\boldsymbol{y}_{h_{k-1}}, & \boldsymbol{z}_1, \cdots, & \boldsymbol{z}_{h_{k-2}} \\ N^3\boldsymbol{x}_1, \cdots, & N^3\boldsymbol{x}_{h_k}, & N^2\boldsymbol{y}_1, \cdots, & N^2\boldsymbol{y}_{h_{k-1}}, & N\boldsymbol{z}_1, \cdots, & N\boldsymbol{z}_{h_{k-2}}, \cdots \\ & & \cdots\cdots & & & \\ N^{k-1}\boldsymbol{x}_1, \cdots, & N^{k-1}\boldsymbol{x}_{h_k}, & N^{k-2}\boldsymbol{y}_1, \cdots, & N^{k-2}\boldsymbol{y}_{h_{k-1}}, & N^{k-3}\boldsymbol{z}_1, \cdots, & N^{k-3}\boldsymbol{z}_{h_{k-2}}, \cdots \end{array}\right. \end{array}\right.$$

そして，各部分空間

$$\langle N^{k-1}\boldsymbol{x}_1, N^{k-2}\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_1\rangle, \quad \cdots, \quad \langle N^{k-1}\boldsymbol{x}_{h_k}, N^{k-2}\boldsymbol{x}_{h_k}, \cdots, \boldsymbol{x}_{h_k}\rangle,$$
$$\langle N^{k-2}\boldsymbol{y}_1, N^{k-3}\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_1\rangle, \quad \cdots, \quad \langle N^{k-2}\boldsymbol{y}_{h_{k-1}}, N^{k-3}\boldsymbol{y}_{h_{k-1}}, \cdots, \boldsymbol{y}_{h_{k-1}}\rangle,$$
$$\langle N^{k-3}\boldsymbol{z}_1, N^{k-4}\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_1\rangle, \quad \cdots, \quad \langle N^{k-3}\boldsymbol{z}_{h_{k-2}}, N^{k-4}\boldsymbol{z}_{h_{k-2}}, \cdots, \boldsymbol{z}_{h_{k-2}}\rangle,$$
$$\cdots\cdots$$

は N-不変となる．(n, k) 行列 $(N^{k-1}\boldsymbol{x}_1 \quad N^{k-2}\boldsymbol{x}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_1)$ に N を左からかけると

$$N(N^{k-1}\boldsymbol{x}_1 \quad N^{k-2}\boldsymbol{x}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_1) = (N^{k-1}\boldsymbol{x}_1 \quad N^{k-2}\boldsymbol{x}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_1)J(0, k)$$

が成り立つ．他の部分空間についても同様である．したがって

$$P = (N^{k-1}\boldsymbol{x}_1 \quad N^{k-2}\boldsymbol{x}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_1 \quad \cdots \quad N^{k-1}\boldsymbol{x}_{h_k} \quad N^{k-2}\boldsymbol{x}_{h_k} \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_{h_k}$$
$$N^{k-2}\boldsymbol{y}_1 \quad N^{k-3}\boldsymbol{y}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{y}_1 \quad \cdots \quad N^{k-2}\boldsymbol{y}_{h_{k-1}} \quad N^{k-3}\boldsymbol{y}_{h_{k-1}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{y}_{h_{k-1}} \quad \cdots)$$

と置くと，P は正則行列になり

$$NP = P\begin{pmatrix}
J(0,k) & & & & & & & & & \\
& \overset{h_k}{\ddots} & & & & & & O & & \\
& & J(0,k) & & & & & & & \\
& & & J(0,k-1) & & & & & & \\
& & & & \overset{h_{k-1}}{\ddots} & & & & & \\
& & & & & J(0,k-1) & & & & \\
& & & & & & \ddots & & & \\
& & & & & & & J(0,1) & & \\
& O & & & & & & & \overset{h_1}{\ddots} & \\
& & & & & & & & & J(0,1)
\end{pmatrix}$$

を満たす．逆行列 P^{-} を両辺の左からかけると，次の形になる．

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix}
J(0,k) & & & & & & & & & \\
& \overset{h_k}{\ddots} & & & & & & O & & \\
& & J(0,k) & & & & & & & \\
& & & J(0,k-1) & & & & & & \\
& & & & \overset{h_{k-1}}{\ddots} & & & & & \\
& & & & & J(0,k-1) & & & & \\
& & & & & & \ddots & & & \\
& & & & & & & J(0,1) & & \\
& O & & & & & & & \overset{h_1}{\ddots} & \\
& & & & & & & & & J(0,1)
\end{pmatrix} \blacksquare$$

問 18 （＊）と（＊＊）を合わせたベクトルが 1 次独立になることを示せ．

注意 べき零行列の標準形は，ジョルダン・ブロックの並ぶ順番を除いて一意的である．

例 7 3 次のべき零行列の標準形としては次の 3 つである．

$$J(0,3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} J(0,2) & O \\ O & J(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J(0,1) & & O \\ & J(0,1) & \\ O & & J(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例題 7.13　次のべき零行列の標準形を求めよ.

$$（1）\quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad （2）\quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解答　（1）　N_1 は $N_1{}^2 \neq O$, $N_1{}^3 = O$ を満たす. そして

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\subset W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \boldsymbol{C}^3$$

となる.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_3$$

ととれば, $\langle \boldsymbol{x} \rangle \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ を満たす. したがって

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad N_1\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad N_1{}^2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は $\boldsymbol{C}^3$ の基底となる.

$$P = (N_1{}^2\boldsymbol{x} \quad N_1\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置くと

$$P^{-1}N_1P = J(0,3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

（2） N_2 は $N_2 \neq O$，$N_2^{\,2} = O$ を満たし，$\dim W_1 = 2$，$\dim W_2 = 3$ である．たとえば

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

と表される．この場合

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad N_2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ととれる．

$$P = (N_2\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

と置くと

$$P^{-1}N_2P = \begin{pmatrix} J(0,2) & O \\ O & J(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

問 19 次のべき零行列 N の標準形を求めよ．また，そのときの P も求めよ．

（1） $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ （2） $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

（3） $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ （4） $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

定理 7.18（ジョルダン標準形）

A を n 次正方行列，その固有多項式を

$$\phi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r}$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j), \qquad n = n_1+n_2+\cdots+n_r$$

とする．このとき適当な正則行列 P をとると

$$J = P^{-1}AP$$

とできる．ここで，J は各ジョルダン・ブロックが $J(\lambda_i, k)$ の形をしたジョルダン行列である．

証明　固有値 λ_i の広義固有空間 $W(\lambda_i)$ に対して，部分空間の列

$$(*) \qquad W_1(\lambda_i) \subset W_2(\lambda_i) \subset \cdots \subset W_k(\lambda_i) = W_{k+1}(\lambda_i) = \cdots$$

を考える．ここで

$$W_j(\lambda_i) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \mid (\lambda_i E-A)^j \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$
$$= \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \mid (A-\lambda_i E)^j \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$
$$W(\lambda_i) = W_k(\lambda_i)$$

である．$W(\lambda_i)$ は $\boldsymbol{C}^n$ の A-不変および $(A-\lambda_i E)$-不変な部分空間になる．

定理 7.17 の議論を行列 $A-\lambda_i E$ と部分空間の列 $(*)$ に対して適用できる．$W(\lambda_i)$ の基底 $\{\boldsymbol{p}_1{}^i, \boldsymbol{p}_2{}^i, \cdots, \boldsymbol{p}_{n_i}{}^i\}$ で，それを並べて得られる (n, n_i) 行列

$$P_i = (\boldsymbol{p}_1{}^i \quad \boldsymbol{p}_2{}^i \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_{n_i}{}^i)$$

が

$$(A-\lambda_i E)P_i = P_i \begin{pmatrix} J(0, k_1{}^i) & & & O \\ & J(0, k_2{}^i) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(0, k_{l_i}{}^i) \end{pmatrix},$$

$$n_i = k_1{}^i + k_2{}^i + \cdots + k_{l_i}{}^i$$

の形になるものを選ぶことができる．$\lambda_i EP_i = \lambda_i P_i$ を右辺に移項すると

$$AP_i = \lambda_i P_i + P_i \begin{pmatrix} J(0, k_1{}^i) & & & O \\ & J(0, k_2{}^i) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(0, k_{l_i}{}^i) \end{pmatrix}$$

$$= P_i \begin{pmatrix} J(\lambda_i, k_1{}^i) & & & O \\ & J(\lambda_i, k_2{}^i) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(\lambda_i, k_{l_i}{}^i) \end{pmatrix}$$

となる．

さらに

$$P = (\boldsymbol{p}_1{}^1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_{n_1}{}^1 \quad \boldsymbol{p}_1{}^2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_{n_2}{}^2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_1{}^r \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_{n_r}{}^r)$$

と置くと，P は正則行列になり

$$AP = P \begin{pmatrix} J(\lambda_1, k_1{}^1) & & & O \\ & J(\lambda_1, k_2{}^1) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(\lambda_r, k_{l_r}{}^r) \end{pmatrix}$$

$$n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{l_i} k_j{}^i$$

を満たす．この両辺の左から P^{-1} をかけると，求めるジョルダン行列 $J = P^{-1}AP$ を得る． ▒

例題 7.14 次の行列のジョルダン標準形を求めよ．また，そのときの P も求めよ．

（1） $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ （2） $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

解答 （1） A の固有値は $\phi_A(\lambda) = (\lambda-3)^3$ より，$\lambda = 3, 3, 3$（3 重解）である．$A-3E \neq O$，$(A-3E)^2 = O$ を満たし，

$$W_1(3) \subset W_2(3) = W(3) = \boldsymbol{C}^3$$

$$\dim W_1(3) = 2, \qquad \dim W_2(3) = 3$$

となる．たとえば

$$W_1(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset W_2(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

と表される．したがって

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (A-3E)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は $\boldsymbol{C}^3$ の基底になる．

$$P = ((A-3E)\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と置くと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J(3,2) & O \\ O & J(3,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．

（2）　B の固有値は $\phi_B(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$ より，$\lambda = 2, 2, 3$ である．

$\lambda = 2$ に対しては

$$W_1(2) \subset W_2(2) = W(2), \qquad \dim W_1(2) = 1$$

$$\dim W_2(2) = 2$$

が成り立つ．たとえば

$$W_1(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset W_2(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

と表される．そして

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (B-2E)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる．

$\lambda = 3$ に対しては

$$W_1(3) = W(3), \qquad \dim W_1(3) = 1$$

となり

$$W_1(3) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

と表される．したがって

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P = ((B-2E)\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

と置くと

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} J(2,2) & 0 \\ 0 & J(3,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．

問 20　次の行列 A のジョルダン標準形を求めよ．また，そのときの P も求めよ．

（1）$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

練習問題7

[A]

1. M_2 を2次正方行列全体のなす線形空間とする．$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ とするとき

$$\psi:\ M_2 \ni X \to AX-XA \in M_2$$

で定まる線形写像 ψ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

2. 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．対角化可能ならば正則行列 P を求め対角化せよ．

（1）$\begin{pmatrix}10 & -4\\ 15 & -7\end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix}3 & -7 & 3\\ 3 & -5 & 1\\ 4 & -5 & 0\end{pmatrix}$　（3）$\begin{pmatrix}-8 & 11 & 0\\ -6 & 9 & 0\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}$

（4）$\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 5 & -2 & -1\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 4 & 6 & -4 & 0\end{pmatrix}$　（5）$\begin{pmatrix}-3 & -2 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 4 & 2\\ 0 & -4 & 5 & 2\\ 4 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$

3. 直交行列 T またはユニタリ行列 U を求めて，次の行列 A を対角化せよ．

（1）$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix}0 & 1 & i\\ 1 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0\end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$　（4）$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & -i & 0 & 0\\ -i & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

4. 次の2次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ の標準形と符号数を求めよ．また $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ を満たすとき，$Q(\boldsymbol{x})$ の最大値と最小値を求めよ．

（1）$x_1^2+x_2^2-2x_3^2-4x_1x_3$

（2）$3x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$

（3）$x_1^2-3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3$

5. $f_1=1,\ f_2=1,\ f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\ (n \geqq 3)$ で定められる数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ をフィボナッチ数列という．このとき

（1）$\begin{pmatrix}f_n\\ f_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{n-1}\\ f_{n-2}\end{pmatrix}$ と表されることを示せ．

（2）行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ の A^n を計算することにより，フィボナッチ数列の一般

項 f_n を求めよ．

6．次のジョルダン行列 A に対して A^n を求めよ．

（1）$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$　（3）$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

7．前問の結果を用い，例題 7.14 で取り扱った行列の n 乗を求めよ．

［**B**］

1．A, B を n 次正方行列とするとき，積 AB と BA の固有値は一致することを示せ．

2．n 次正方行列 A の固有値がすべて実数で 1 より小ならば，$|E-A|>0$ が成り立つことを示せ．

3．n 次複素正方行列 A が $AA^* = A^*A$ を満たすとき，A を**正規行列**という．次を示せ．

（1）ユニタリ行列とエルミート行列はともに正規行列になる．

（2）A が正規行列ならば，A^*，A^{-1}，${}^tA$ も正規行列になる．

4．A を正規行列とするとき，次を示せ．

（1）λ が A の固有値のとき，$\bar{\lambda}$ は A^* の固有値になる．

（2）$\boldsymbol{x}$ が固有値 λ に対する A の固有ベクトルならば，$\boldsymbol{x}$ は固有値 $\bar{\lambda}$ に対する A^* の固有ベクトルにもなる．

5．n 次複素正方行列 A がユニタリ行列を用いて対角化できるための必要十分条件は，A が正規行列であることを示せ．

6．n 次正方行列 A に対して，$f(A) = O$ となる複素係数の多項式 $f(\lambda)$ の中で次数が最小で最高次の係数が 1 であるものを A の**最小多項式**という．そして $\psi_A(\lambda)$ で表す．次を示せ．

（1）固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ は $\psi_A(\lambda)$ で割り切れる．

（2）λ_i を行列 A の固有値とする．このとき $\psi_A(\lambda)$ は $\lambda-\lambda_i$ で割り切れる．

7．n 次正方行列 A の固有多項式を固有値でまとめて

$$\phi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r}$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j), \qquad n = n_1+n_2+\cdots+n_r$$

と表す．このとき A の最小多項式が

$$\psi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_r)$$

と表されることと，A が対角化可能であることが同値なことを証明せよ．

8．次の行列 A の最小多項式を求めよ．

（1）$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 10 & 7 & 10 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$　　（4）$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 12 & -3 & -11 \\ -2 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

9.　n 次正方行列 A に対して

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = E + \frac{1}{1!} A^1 + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots$$

で定義される行列を A の**指数**という．この級数は常に収束することが知られている．次の行列の指数を計算せよ．

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　　（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

（4）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$　　（5）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　（6）$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

（7）$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

10.　n 次正方行列 A と B が $AB = BA$ を満たせば

$$\exp(A+B) = \exp A \exp B$$

が成り立つことを示せ．

問題解答とヒント

第 1 章

1.1

問 1 （1） $8-i$ （2） $1/2-i/2$ （3） $-5/2-i/2$
（4） $-18/13-i/13$ （5） $-19+33i$ （6） $-1/17-4i/17$

問 2 $|z_1| = |(z_1z_2)/z_2|$, $\angle z_1 O 1 = \angle (z_1z_2) O z_2$ より.

問 4 （1） $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ （2） $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$

（3） $2(\cos\pi+i\sin\pi)$ （4） $3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

1.2

問 8 （1） $\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 3 & 5 & -5\end{pmatrix}$ （2） $\begin{pmatrix}-31 & 6 & -8\\ 21 & -5 & -5\end{pmatrix}$ （3） $\begin{pmatrix}-28 & 0 & 16\\ -24 & 20 & 8\end{pmatrix}$

（4） $\begin{pmatrix}40 & 22 & -18\\ -15 & 7 & 10\end{pmatrix}$

問 10 必要十分条件は $A = cE_2$, 一般には $A = cE_n$.

問 12 （1） ${}^tAA = A^*A = \begin{pmatrix}10 & 1\\ 1 & 30\end{pmatrix}$, $A\,{}^tA = AA^* = \begin{pmatrix}5 & 1 & -10\\ 1 & 10 & 5\\ -10 & 5 & 25\end{pmatrix}$

（2） ${}^tAA = \begin{pmatrix}-3 & -1+i & -5+2i\\ -1+i & -2i & 3-3i\\ -5+2i & 3-3i & 9+2i\end{pmatrix}$, $A\,{}^tA = \begin{pmatrix}-4+2i & 3+i\\ 3+i & 10-2i\end{pmatrix}$

$$A^*A = \begin{pmatrix}5 & -1+i & -1-2i\\ -1-i & 2 & 3+3i\\ -1+2i & 3-3i & 11\end{pmatrix},\quad AA^* = \begin{pmatrix}6 & 3+i\\ 3-i & 12\end{pmatrix}$$

1.3

問 17 （1） $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3/2 & -1\end{pmatrix}$ （2） $\begin{pmatrix}1/3 & -i/3\\ -2i/3 & 1/3\end{pmatrix}$

（3） $\begin{pmatrix}2 & 3/2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ （4） $\begin{pmatrix}2/3-i/2 & -1/3+i/3\\ 1/2-4i/3 & -1/3+2i/3\end{pmatrix}$

問 18 （1） $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ （$r = 4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$）

（2）　$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^r = O$　$(r \geqq 3)$

（3）　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　$(r = 3k, 3k+1, 3k+2)$

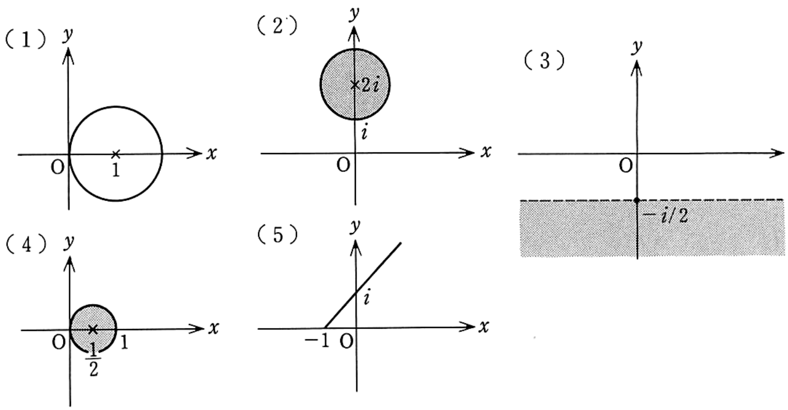
（4）　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ra \\ 0 & 1 & rb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問 19　k を $N^k \neq O$, $N^{k+1} = O$ を満たす自然数とする．N が正則ならば，$N^k = N^{-1}N^{k+1} = N^{-1}O = O$ となり矛盾．

練習問題 1

［**A**］

1.



2.　（1）　$32i$　　（2）　$1/16 + i/16$　　（3）　$-4+4i$

4.　（1）　$\cos\dfrac{k\pi}{4} + i\sin\dfrac{k\pi}{4}$　$(k = 1, 3, 5, 7)$

（2）　$\cos\dfrac{k\pi}{6} + i\sin\dfrac{k\pi}{6}$　$(k = 1, 5, 9)$

（3）　$\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{k\pi}{8} + i\sin\dfrac{k\pi}{8}\right)$　$(k = 1, 9)$

5.　$AB = \begin{pmatrix} -7 & -14 & 0 \\ -18 & -35 & 2 \end{pmatrix}$,　$BC = \begin{pmatrix} -35 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$,　$BD = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ 20 & 22 & 10 \end{pmatrix}$

$$CA = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -9 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} -9 & -14 & 8 \\ 1 & 7 & 10 \\ 8 & 0 & -32 \end{pmatrix}, \quad DC = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 10 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

6. (1) $\begin{pmatrix} -32 & -89 & 9 \\ 8 & 33 & 3 \\ 34 & 98 & -10 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 9 & 35 & -3 \\ 40 & -40 & -23 \\ 2 & -32 & -4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -42 & -36 & 14 \\ 54 & 2 & -18 \\ 84 & 72 & -28 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & 27 & 7 \\ 25 & 55 & -3 \\ 8 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

8. (1) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

9. (1) $\begin{pmatrix} 2/9 & -1/9 \\ 5/9 & 2/9 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

(3) $\dfrac{1}{173}\begin{pmatrix} 7-41i & -14-91i \\ -13+2i & 26-4i \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

10. (1) $\begin{pmatrix} a^r & 0 \\ 0 & b^r \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a^k c^k & 0 & 0 \\ 0 & b^{2k} & 0 \\ 0 & 0 & a^k c^k \end{pmatrix}$ $(r = 2k)$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^k c^{k-1} \\ 0 & b^{2k-1} & 0 \\ a^{k-1} c^k & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(r = 2k-1)$

(3) $\begin{pmatrix} a^r & ra^{r-1} & \dfrac{r(r-1)}{2}a^{r-2} \\ 0 & a^r & ra^{r-1} \\ 0 & 0 & a^r \end{pmatrix}$

11. (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

[B]

1. $(P^{-1}AP)^r = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = P^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP$
$= P^{-1}A^rP$

2. （1）$(E-A)(E+A^1+\cdots+A^{r-1})=E$ より．

（2）$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}^1+\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}^2$$
$$=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

3. $A^{-1}=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}$ とブロックに分けて考える．

4. （1）$\begin{pmatrix}1/2&1/2&4\\0&1&3\\0&0&-1\end{pmatrix}$ （2）$\begin{pmatrix}2&3&-7/2&-11/2\\-1&-2&11/6&7/2\\0&0&-1/6&1/2\\0&0&1/3&0\end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix}-2&-3&-18&47\\-1&-2&-11&29\\0&0&-3&7\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$

第 2 章

2.1

問 2 （1）$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&2&3&1\end{pmatrix}$ （2）$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&2&3\end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&3&1\end{pmatrix}$ （4）$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&2&4\end{pmatrix}$

問 3 （1）$\sigma=(1\ \ 6)(1\ \ 2)(1\ \ 3)(4\ \ 5)$, $\operatorname{sgn}\sigma=1$

（2）$\sigma=(1\ \ 4)(1\ \ 7)(2\ \ 6)(2\ \ 3)(2\ \ 5)$, $\operatorname{sgn}\sigma=-1$

問 4 （1）$k=4$

（2）$k=12$. 置換を巡回置換の積で表し，その長さの最小公倍数を求める．

2.2

問 5 （1）-36 （2）$9+i$ （3）-2

（4）-87 （5）0 （6）16 （7）-4

問 6 （1）-72 （2）$-6+18i$ （3）-96

問 7 （1）$6|A|$ （2）$10|A|$ （3）0

問 8 （1）16 （2）64 （3）76

問 9 （1）$(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$ （2）$2(a+b)(b+c)(c+a)$

（3）$-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

問 10　（1）　$x_1 = 7/4$, $x_2 = 11/4$, $x_3 = -1/2$

（2）　$x_1 = -41$, $x_2 = 22$, $x_3 = 29$

（3）　$x_1 = 13/10-9i/10$, $x_2 = -17/30-3i/10$, $x_3 = -3/10+37i/30$

（4）　$x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$

2.3

問 11　（1）　41　　（2）　51

問 12　（1）　$${}^t\tilde{A} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

（2）　正則でない，$${}^t\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

（3）　$${}^t\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -10 & 7 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix},\quad A^{-1} = \frac{1}{9}\,{}^t\tilde{A}$$

（4）　$${}^t\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1+i & 0 & 1-i \\ 2i & -2 & 0 \\ 1+i & 2i & -1+i \end{pmatrix},\quad A^{-1} = \frac{-1}{2+2i}\,{}^t\tilde{A}$$

（5）　$${}^t\tilde{A} = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 16 & -12 \\ 6 & -2 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & -16 & 12 \\ 0 & 0 & 14 & -10 \end{pmatrix},\quad A^{-1} = \frac{1}{4}\,{}^t\tilde{A}$$

（6）　$${}^t\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad A^{-1} = -{}^t\tilde{A}$$

練習問題 2

［**A**］

1.　$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\quad \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},\quad \sigma^{-1}\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad \tau^{-1}\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.　（1）　$(1\ \ 2)(1\ \ 5)(3\ \ 4)(3\ \ 6)(3\ \ 7)$，奇置換

（2）　$(1\ \ 7)(1\ \ 4)(2\ \ 6)(3\ \ 5)$，偶置換

（3）　$(1\ \ 7)(2\ \ 6)(3\ \ 5)$，奇置換

（4）　$(1\ \ 7)(1\ \ 6)(1\ \ 5)(1\ \ 4)(1\ \ 3)(1\ \ 2)$，偶置換

4. (1) 113　(2) -16　(3) 89　(4) $-4+28i$
(5) $(2+n)2^{n-1}$　(6) $(-1)^{n(n-1)/2}n^{n-1}(n+1)/2$

5. (1) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$　(2) $2(a+b+c)^3$
(3) $4a^2b^2c^2$　(4) $2(ab+bc+ca)^3$　(5) $(a-b)(b-c)(c-d)d$
(6) $(a-b)(a-c)(a-d)(a+b+c+d)$
(7) $-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$
(8) $(a+nb)a^{n-1}$

6. (1) $-1, -1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}$　(2) $-1, -2+i, -2-i$

7. (1) $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -11 \\ -1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$　(2) $\dfrac{1}{35}\begin{pmatrix} 7 & -7 & -7 \\ -5 & 15 & 10 \\ -11 & 26 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\dfrac{1}{17}\begin{pmatrix} 1+4i & 15-8i & 6+7i \\ -3+5i & 6+7i & -1-4i \\ 9+2i & -1-4i & 3-5i \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -5/2 & -3 & 4 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & 1 & 1/2 \\ -3/2 & -1 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}$

[B]

1. (1) 9　(2) $\sigma\Delta = \mathrm{sgn}\,\sigma\,\Delta$ より．

2. k 文字の巡回置換は $k-1$ 個の互換の積で表されるから．

3. $\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & B \\ O & C \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & O \\ O & E \end{vmatrix} = |C|\,|A| = |A|\,|C|$．ここで例題 2.2 を用いた．

4. (1) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ (B+A)-(A+B) & A-B \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} A+B & B \\ O & A-B \end{vmatrix} = |A+B|\,|A-B|$$

(2) $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ B+iA & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ (B+iA)-i(A-iB) & A+iB \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ O & A+iB \end{vmatrix} = |A-iB|\,|A+iB|$$

5. $\cos \mathrm{B} = -\cos(\mathrm{A}+\mathrm{C})$ と

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\cos \mathrm{A} & -\sin \mathrm{A} & 0 \\ \cos(\mathrm{A}+\mathrm{C}) & \sin(\mathrm{A}+\mathrm{C}) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \cos \mathrm{A} & -\cos(\mathrm{A}+\mathrm{C}) \\ 0 & \sin \mathrm{A} & -\sin(\mathrm{A}+\mathrm{C}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & \cos A & \cos B \\ \cos A & -1 & \cos C \\ \cos B & \cos C & -1 \end{pmatrix}$$

を用いる．

6. （1）　$D_2 = x^2-(a_1+a_2)x+(1+a_1a_2)$

$D_3 = x^3-(a_1+a_2+a_3)x^2+(2+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)x-(a_1+a_3+a_1a_2a_3)$

（2）　第 $n+1$ 列で展開する．

7. 定理 2.13 の逆行列の計算法と $|A|\,|A^{-1}| = 1$ の関係を用いる．

第　3　章

3.1

問 2　$|P_i(c)| = c$，$|P_{ij}| = -1$，$|P_{ij}(c)| = 1$，

$P_i(c)^{-1} = P_i(c^{-1})$，$P_{ij}{}^{-1} = P_{ij}$，$P_{ij}(c)^{-1} = P_{ij}(-c)$

問 3　（1）　2　　（2）　2　　（3）　4

問 5　（1）　$\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & -9 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$　　（2）　正則でない

（3）　$\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3.2

問 6　rank $(A \quad \boldsymbol{b}) = \text{rank}\, A = n$

問 7　（1）　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}c + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$　　（2）　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}c + \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

（3）　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}c + \begin{pmatrix} 20/7 \\ -3/7 \\ 0 \end{pmatrix}$

（4）　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}c_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

問 8　$7a+4b+5c=0$,　$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} (4a+3b)/10 \\ (-2a+b)/10 \\ 0 \end{pmatrix}$

問 9　（1）　$a=4, -3$　　（2）　$a=1, -2$

問 10　（1）　$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　　（2）　$\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

問 11　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2$

問 13　直線を $ax+by+c=0$ として，$ax_i+by_i+c=0\ (i=1,2,3)$ を a, b, c を未知数とする同次連立 1 次方程式と見る．

練習問題 3

[A]

1.　（1）　2　　（2）　3　　（3）　3　　（4）　2　　（5）　3

2.　（1）　$\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$　　（2）　$\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$

（3）　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1 & 1 & 0 \\ -1/8 & 3/4 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$

3.　（1）　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} c_2 + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　　（2）　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000/3 \\ 1000/3 \\ 4000/3 \end{pmatrix}$

（3）　解はない

（4）　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 203 \\ -201 \\ 2 \end{pmatrix} c$　　（5）　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} c_2$

（6）$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ i \\ -1+i \\ 1 \end{pmatrix} c$

4.　$a = b+d = c+e$ のとき，一般解は $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2 + \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5.（1）　$a = 2$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$，$a = -\dfrac{11}{7}$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ -14/3 \end{pmatrix}$

（2）　$b = 5$，$c = 0$，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} c_2 + \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

6.　$a+b-c = 0$

7.（一例）　順に基本変形 ③+①×(−2)，③+②×(−1)，③×(−1)，②+③×4，①+③×(−3)，①+②×(−2) を行うことにより

$$P_{31}(-2)^{-1}P_{32}(-1)^{-1}P_3(-1)^{-1}P_{23}(4)^{-1}P_{13}(-3)^{-1}P_{12}(-2)^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.　$a = -2$　$\left(交点は\left(\dfrac{7}{6}, -\dfrac{11}{6}\right)\right)$

10.　$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

[B]

1.（1）　$a \neq 1, -\dfrac{1}{2}$ のとき 3，$a = -\dfrac{1}{2}$ のとき 2，$a = 1$ のとき 1.

（2）　$a+2b \neq 0$ で $a \neq b$ のとき 3，$a+2b = 0$ で $a \neq b$ のとき 2，$a+2b \neq 0$ で $a = b$ のとき 1，$a = b = 0$ のとき 0.

（3）　$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2$（$t_1$, t_2 は任意）の形のとき 2，他の場合は 3.

（4） $a+b+c \neq 0$ で a, b, c がすべて異なるとき 3，$a+b+c=0$ で a, b, c がすべて異なるとき 2，a, b, c のうち 2 つだけが一致するとき 2，$a=b=c$ のとき 1.

（5） $a \neq 1, 2$ のとき 4，$a=1$ のとき 3，$a=2$ のとき 2.

2. （1） $\begin{pmatrix} -x^3 & 3x^2 & -3x & 1 \\ x^2 & -2x & 1 & 0 \\ -x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　（2） $\begin{pmatrix} O & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & O \end{pmatrix}$

（3） $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & 1 \end{pmatrix}$

3. $a+b+c \neq 0$ で $a=b=c$ でないときは $x_1=1$，$x_2=x_3=0$.

$a=b=c$ のとき $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$a+b+c=0$ のとき $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. $a=1, 2$

6. 基本変形により A_1, A_2 を階段行列 B_1, B_2 に変形すれば，$A \to \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$. さらに行の入れかえを行う.

7. [**B**] 5 の結果を用いる.

第 4 章

4.1

問 2 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 6$，$\|\boldsymbol{a}\| = 2\sqrt{2}$，$\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{6}$，$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| = \sqrt{26}$，$\theta = \pi/6$，単位ベクトルは $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_3$ と $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_2 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_3$

問 5 （2） 両辺の成分表示を計算する.

問 6 $\dfrac{1}{6}|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})| = \dfrac{9}{2}$

4.2

問 8 零ベクトルを $\boldsymbol{o}, \boldsymbol{o}'$ として I（3）を用いれば $\boldsymbol{o}' = \boldsymbol{o}' + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$. $\boldsymbol{a}$ の逆ベクトルを $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}''$ とすれば，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{o}$，$\boldsymbol{a}''+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ より

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{o}+\boldsymbol{a}' = (\boldsymbol{a}''+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}''+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}') = \boldsymbol{a}''+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}''.$$

問 9　（1）　$\boldsymbol{a} = (0+0)\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{a}$ より I（3）を用いれば $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.

問 10　部分空間にならない.

問 13　$\boldsymbol{R}^2$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合ではない．例 10 では空間ベクトルの z 成分を 0 と見る.

問 14　$\boldsymbol{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S$，$x_1 = \dfrac{1}{2}$，$x_2 = 0$，$c = 3$ とすれば $c\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \notin T$.

問 15　（1）　部分空間にならない．零行列 O は正則行列ではない.

（2）　部分空間にならない．$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $(A+B)^2 \neq O$.

問 18　$k = -8$

問 19　$3A+2B+C$

問 22　$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} = 3\omega(\omega-1) \neq 0$

問 23　たとえば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ととればよい.

問 25　（1）　$h\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ とする．$\boldsymbol{c} = t\boldsymbol{b}\ (t \neq 0)$ と書けるから $h\boldsymbol{a}+kt\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ から $h = k = 0$.

（2）　$r(2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})+s(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+t(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{o}$ とすれば $(-s+4t)\boldsymbol{a}+(2r+t)\boldsymbol{b}+(3r+s)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次独立より $-s+4t = 2r+t = 3r+s = 0$. これから $r = s = t = 0$.

4.3

問 27　$c_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_r\boldsymbol{a}_r+d\boldsymbol{b} = 0$ とする．$d \neq 0$ なら $\boldsymbol{b} = -\dfrac{1}{d}(c_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_r\boldsymbol{a}_r) \in W$ であるから $d = 0$. よって，$c_1 = \cdots = c_r = 0$.

問 29　$\mathrm{rank}(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3\ \ \boldsymbol{a}_4) = 3$ より 3 次元.

問 31　たとえば $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_3$ ととればよい.

問 32　$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{u}_1\}$

問 33　定理 3.3 による.

問 34　$Q = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 13 & 18 \end{pmatrix}$

問 35　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を列ベクトルとする行列 $(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}_n)$.

練習問題 4

[A]

1.　（1）　$2\boldsymbol{e}_1+71\boldsymbol{e}_2-38\boldsymbol{e}_3$　　（2）　-163

2. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-5\\4\\7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\-5\end{pmatrix}$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-7\\3\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{pmatrix}-9\\13\\1\end{pmatrix}$,
$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-13$

3. $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$

4. A, B, C が同一直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$（平行）$\Longleftrightarrow$ $m(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=(-n)(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$ となる 0 でない実数 m, n が存在する．

5. （1） 部分空間になる　（2） 部分空間にならない
（3） 部分空間になる　（4） 部分空間にならない

6. （1） 部分空間になる　（2） 部分空間になる　（3） 部分空間になる
（4） 部分空間にならない　（5） 部分空間になる

7. （1） 1次独立　（2） 1次従属　（3） 1次従属
（4） 1次従属　（5） 1次独立

8. （1） $a=-2,0,4$　（2） $a=1\pm i$

9. （1） 1次独立になる　（2） 1次独立になる

10. （1） $r=3$　（2） たとえば $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が1次独立で $\boldsymbol{a}_4=\frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3$.

11. 生成しない．$\boldsymbol{v}={}^t(v_1\ \ v_2\ \ v_3)$ とすれば，属する条件は $5v_1-v_2-3v_3=0$.

12. （1） 次元は 2，基底は $\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

（2） 次元は 2，基底は $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

13. $ax^2+bx+c=a(x^2+x)+\frac{1}{3}(-a+b+c)(x+2)+\frac{1}{3}(-2a+2b-c)(x-1)$,
1次独立になることは容易．

14. 列ベクトルからなる行列の行列式は 1 になる．

15. $W_1\cap W_2$ のベクトルは $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2=c_3\boldsymbol{a}_3+c_4\boldsymbol{a}_4$ と書ける．この同次連立方程式の 1 つの解は $(c_1,c_2,c_3,c_4)=(3,1,1,1)$. これから $W_1\cap W_2$ の次元は 1 で基底は $\{{}^t(7\ \ 2\ \ 2\ \ -3)\}$，$W_1+W_2$ の次元は 3 で基底は $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ がとれる．

16. $P=\begin{pmatrix}4&3&2\\-1&-1&-2\\-3&-1&-1\end{pmatrix}$

17. （1） $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ （2） $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

[B]

1. $0 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ より $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 1$. 同様に $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 9$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -4$ を得るから $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 3$, $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 6$, $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = 2$.

2. （1） 4.1 節問 5 による.

3. $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ は 1 組の基底になるから，$n+1$ 次元.

4. （1） 部分空間になる　（2） 部分空間になる

（3） 部分空間にならない. $A = B = E_2$ （$= 2$ 次単位行列）とすれば, $A+B \notin W$.

（4） 部分空間にならない. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば，$A+B \notin W$.

5.
$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}^3 \ni \boldsymbol{x} &= c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3 \\ &= \frac{1}{2}(c_1+c_2-c_3)(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+\frac{1}{2}(-c_1+c_2+c_3)(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3) \\ &\quad +\frac{1}{2}(c_1-c_2+c_3)(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1). \end{aligned}$$

6. $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+\cdots+c_n(\boldsymbol{a}_1+\cdots+\boldsymbol{a}_n) = \boldsymbol{o}$ から $c_1+\cdots+c_n = 0$, $c_2+\cdots+c_n = 0$, $\cdots$, $c_n = 0$. よって $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

7. 和とスカラー倍は $\{a_n\}+\{b_n\} = \{a_n+b_n\}$, $c\{a_n\} = \{ca_n\}$ で定義する. 零元は $\{\boldsymbol{o}\} = \{0, 0, \cdots\}$. $W \ni \{a_n\} = a_1\{u_n\}+a_0\{v_n\}$ と書ける. $c\{u_n\}+d\{v_n\}=\{\boldsymbol{o}\}$ とすると $cu_0+dv_0 = 0$, $cu_1+dv_1 = 0$ より $c = d = 0$.

9. $AX = XB$, $AY = BY$ とすれば, $A(X+Y) = AX+AY = XB+YB = (X+Y)B$, $A(cX) = c(AX) = c(XB) = (cX)B$.

10. （1） $\Longrightarrow$: $W_1 \cap W_2 \ni \boldsymbol{a}$ をとれば $W_1+W_2 \ni \boldsymbol{a}+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}+\boldsymbol{a} \in W_1+W_2$ より $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.

$\Longleftarrow$: $V \ni \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1'+\boldsymbol{a}_2'$ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1' \in W_1,\ \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2' \in W_2)$ とすれば, $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_1' = \boldsymbol{a}_2'-\boldsymbol{a}_2 \in W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ より $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_1'$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2'$.

11. 定理 4.7 参照.

第 5 章

5.1

問 2 f^{-1} は f と一致する.

問 4　$a=c=0$，b は任意.

問 5　$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$，$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ が成り立つ.

問 6　$a \neq -2$

問 8　$\mathrm{Im}\, f \ni y$ をとれば，$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$ がとれて $y = f(x) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1)+\cdots+x_n f(\boldsymbol{e}_n) \in \langle f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)\rangle$. よって $\mathrm{Im}\, f \subset \langle f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)\rangle$. 逆の包含関係は $f(\boldsymbol{e}_i) \in \mathrm{Im}\, f$ による.

問 9　例題 5.1 の場合：$\dim \mathrm{Im}\, f = 2$，$\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$，$\mathrm{Im}\, f$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\}$，$\mathrm{Ker}\, f$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix}-10\\7\\1\end{pmatrix}\right\}$. 例題 5.2 の場合：$\dim \mathrm{Im}\, f = 3$，$\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$，$\mathrm{Im}\, f$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}\right\}$，$\mathrm{Ker}\, f$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix}-1\\15\\-2\\5\end{pmatrix}\right\}$.

問 10　（1）　$\mathrm{Im}\, f = \boldsymbol{R}^m$ より $\mathrm{rank}\, A = \dim \mathrm{Im}\, f = m$. 逆に $\mathrm{Im}\, f \subset \boldsymbol{R}^m$，$\dim \mathrm{Im}\, f = m$ より $\mathrm{Im}\, f = \boldsymbol{R}^m$.

5.2

問 13　$\dim f(g(\boldsymbol{R}^n)) \leqq \dim g(\boldsymbol{R}^n)$ が成り立つ.

問 14　$(f+g)(x+y) = f(x+y)+g(x+y) = f(x)+g(x)+f(y)+g(y) = (f+g)(x)+(f+g)(y)$, $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = Ax+Bx = (A+B)x$. スカラー倍も同様である.

問 16　$\begin{pmatrix}-11 & -13\\-19 & -17\\-14 & -12\end{pmatrix}$

問 17　$\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-13 & -1\\13 & 1\\-5 & 5\end{pmatrix}$

問 19　$\begin{pmatrix}-1 & -2\\-3 & -5\end{pmatrix}$

問 20　（1）　$\mathrm{Im}\, D =$ 高々 1 次の多項式の全体，$\mathrm{Ker}\, D = \{f(x) \mid f'(x) = 0\}$（= 定数多項式の全体）

（2）　$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

練習問題 5

［A］

1. （1） 線形写像にならない　（2） 線形写像にならない

（3） 線形写像になる　（4） 線形写像になる

2. $|A+B|=|A|+|B|$ が成り立たないから f は線形写像にならない．$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}\,A+\mathrm{tr}\,B$，$\mathrm{tr}(cA)=c\,\mathrm{tr}\,A$ であるから g は線形写像になる．

3. $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

4. 像の基底　（1） $\{(1)\}$　（2） $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right\}$　（3） $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\1\\2i\end{pmatrix}\right\}$

核の基底　（1） $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$　（2） なし　（3） $\left\{\begin{pmatrix}-1\\i\\1\end{pmatrix}\right\}$

5. 像の基底は $\left\{\begin{pmatrix}0\\3\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\4\\7\end{pmatrix}\right\}$，核の基底は $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$，$\mathrm{rank}\,f=3$.

6. （1） 行列のランクは 2 より $\dim\mathrm{Im}\,f=2$，$\dim\mathrm{Ker}\,f=0$ となって f は単射．

（2） 行列のランクは 3 より $\dim\mathrm{Im}\,f=3$，$\dim\mathrm{Ker}\,f=0$ となって f は全単射．

（3） 行列のランクは 2 より $\dim\mathrm{Im}\,f=\dim\mathrm{Ker}\,f=2$ となって f は全射でも単射でもない．

7. $\begin{pmatrix}4 & 3 & -2\\ -3 & -5 & 4\end{pmatrix}$

8. （1） 行列のランクは 2 より $\dim\mathrm{Im}\,f=2$，$\dim\mathrm{Ker}\,f=2$．$\mathrm{Im}\,f$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$，$\mathrm{Ker}\,f$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix}5\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$　（2） $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 3 & -9 & 3\\ -1 & -1 & 3 & -1\\ 2 & 4 & -2 & 8\end{pmatrix}$

9. （1） $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 8 & 1 & 2\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$

（2） $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$，$\dfrac{1}{30}\begin{pmatrix}-22 & -11 & 26\\ 124 & 62 & -32\\ 200 & 25 & 20\end{pmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -1$ により正則変換になる．対応する行列は $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 1+2i & i & -2 \\ 1 & i & -i \\ 1-i & 1 & i \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

13. $T(1) = 3+2x$, $T(x) = 3x$, $T(x^2) = 3x^2$ より $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

[B]

1. $f(x) = f(x')\ (x, x' \in X)$ とすると $x = 1_X(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = 1_X(x') = x'$ となり f は単射である．$X \ni x$ に対して，$f(x) = y$ とすると $x = 1_X(x) = g(f(x)) = g(y)$ となり g は全射になる．

3. $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$ とすると $f(c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r) = c_1 f(\boldsymbol{a}_1) + \cdots + c_r f(\boldsymbol{a}_r) = \boldsymbol{o}$. すなわち $c_1 = \cdots = c_n = 0$. f が単射ならば逆が成り立つ．

4. $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g \supset \mathrm{Im}\,(f+g)$ による．

5. （1） $g(\boldsymbol{R}^n) = W$ とおいて，5.1 節問 7 を用いる．$\dim \mathrm{Im}\,(f \cdot g) = \dim f(g(\boldsymbol{R}^n)) = \dim f(W) = \dim W - \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap W) \geqq \dim W - \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{Im}\, g - (m - \dim \mathrm{Im}\, f)$.

（2） $\mathrm{rank}\, PA \leqq \mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, P^{-1}(PA) \leqq \mathrm{rank}\, PA$.（$\mathrm{rank}\, PAQ = \mathrm{rank}\, A$ も成り立つ）

6. $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$，基底は $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

8. $\mathrm{Im}\, f$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1', \cdots, \boldsymbol{a}_r'\}$ を延長して $\{\boldsymbol{a}_1', \cdots, \boldsymbol{a}_r', \boldsymbol{a}_{r+1}', \cdots, \boldsymbol{a}_m'\}$ が V' の基底になるようにする．$f(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{a}_i'$ となる $\boldsymbol{a}_i\ (i = 1, \cdots, r)$ と $\mathrm{Ker}\, f$ の任意の基底 $\{\boldsymbol{a}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+s}\}$ ($\dim \mathrm{Ker}\, f = s = n-r$) とあわせた $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+s}\}$ が V の基底になる．これらの $\{\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2', \cdots, \boldsymbol{a}_m'\}$ と $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+s}\}$ が求める基底になる．

9. （1） $\boldsymbol{R}^n \ni \boldsymbol{x}$ をとれば $A(A\boldsymbol{x}) = A^2\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ より $A\boldsymbol{x} \in W_1$. $A(\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} - A^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ より $\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} \in W_2$. よって，$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}) \in W_1 + W_2$. $W_1 \cap W_2 \ni \boldsymbol{x}$ をとれば $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ となって $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$.

（2） 写像 $f : \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ の核は W_2 であるから $\dim W_2 = n-r$，$\dim W_1 = r$. W_1, W_2 のそれぞれの基底を $\{\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r\}, \{\boldsymbol{p}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{p}_n\}$ として $P = (\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_r \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n)$ とおけば

$$AP = (\boldsymbol{p}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_r \quad \boldsymbol{o} \quad \cdots \quad \boldsymbol{o}) = (\boldsymbol{p}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_r \quad \cdots \boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

10. (2)　$V^* \ni f$ をとる．$\left(\sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{v}_i^*\right)(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{v}_i^*(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{v}_i)\delta_{ij}$ $= f(\boldsymbol{v}_j)$ より $f = \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{v}_i^*$．$c_1\boldsymbol{v}_1^* + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n^* = 0$ (= 零写像) とすれば $0 =$ $\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{v}_i^*\right)(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i\delta_{ij} = c_j$ より $\boldsymbol{v}_1^*, \cdots, \boldsymbol{v}_n^*$ は1次独立になる．

第　6　章

6.1

問1　ユニタリ空間の場合：$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \overline{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})} = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} + \overline{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) +$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$．他も同様にできる．

問3　$(\boldsymbol{a}, B\boldsymbol{b}) = (A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, {}^tA\boldsymbol{b})$ より $(\boldsymbol{a}, (B - {}^tA)\boldsymbol{b}) = 0$.

問4　$a = \pm 2$

問5　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1 - 5i$，$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = 1 + 5i$，$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{14}$，$\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{6}$

問6　$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \quad (m \neq n)$,

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0$　による．

問7　$x = 3$，$y = 13$，$z = 6$

問8　$\left\{\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{22}}\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$

問9　$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

6.2

問11　${}^t(AB)(AB) = {}^tB({}^tAA)B = {}^tBB = E$，${}^t(A^{-1})(A^{-1}) = (A\,{}^tA)^{-1} = E$

問12　2次の直交行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2)$ に対して，$a_{11}{}^2 + a_{21}{}^2 = \|\boldsymbol{a}_1\|^2 = 1$ より $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ と書ける．$\|\boldsymbol{a}_2\| = 1$ で $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2$ より $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$ と書ける．

問 13　f が直交変換ならば，$(f(\boldsymbol{a}_i), f(\boldsymbol{a}_j)) = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$. 逆に $V \ni \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{n} d_j \boldsymbol{a}_j$ と表せば，$\{f(\boldsymbol{a}_1), \cdots, f(\boldsymbol{a}_n)\}$ が正規直交基底のとき，$(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}))$ $= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i f(\boldsymbol{a}_i), \sum_{j=1}^{n} d_j f(\boldsymbol{a}_j)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

問 14　$\det(A^*A) = \overline{\det A} \cdot \det A = |\det A|^2 = 1$ より $|\det A| = 1$.

問 16　$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t(A\boldsymbol{a})\overline{\boldsymbol{b}} = {}^t\boldsymbol{a}\bar{A}^*\overline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a}\overline{A^*\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{a}, A^*\boldsymbol{b})$

問 17　$(a, b) = (3, 2), (2, 3)$

問 18　$A = UT = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2}+\sqrt{2}i \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

問 19　$|A| = |A^*| = |\bar{A}| = \overline{|A|}$ より $|A|$ は実数になる．

練習問題 6

[A]

3.　(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$　(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{70}}\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 22 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.　(1)　$\left\{\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{66}}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right\}$　(4)　$\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

5.　$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$ をとれば，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i) = c_i$.

6.　(1)　$a = 4$　(2)　$b = 0$, $c = -\dfrac{1}{3}$, 最小値 $\dfrac{2}{15}\sqrt{10}$

(3)　$\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}x, \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}}(3x^2-1)\right\}$

7.　(1)　$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{3}$, $\|\boldsymbol{b}\| = 2$, $\|\boldsymbol{c}\| = \sqrt{6}$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2$, $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 1+4i$

(2)　$|\boldsymbol{abc}| = 3$, $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 3-2i \\ 1+3i \\ i \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ -2-i \end{pmatrix}\right\}$

8.　$W_1^{\perp} = \left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$, $W_2^{\perp} = \left\langle\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2-i \end{pmatrix}\right\rangle$

10. $a=\pm\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$，$b=\pm\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$，$c=\mp\dfrac{5}{3\sqrt{5}}$　（複号同順）

11. $\|f(\boldsymbol{a})\|=\|\boldsymbol{a}\|$ より $f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{o}$ ならば $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$.

13. （一例）　$a=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，$b=\dfrac{-1+2i}{\sqrt{6}}$

16. $\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|^2=1$ より

$$(E-2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^*)^*(E-2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^*)=E-4\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^*+4\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^*=E$$

17. $AA^*-A^*A=2i(CB-BC)$

[B]

1. 複素行列 A, B に対して，内積を $(A,B)=\mathrm{tr}({}^tA\bar{B})$ で定義する.

2. $\cos^{-1}\dfrac{1}{3}$

3. $c_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{o}$ として，この両辺と $\boldsymbol{a}_j$ との内積をつくると $\sum_{i=1}^{n}c_i(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)=0\ (j=1,\cdots,n)$. これを $c_1,\cdots,c_n$ を未知数とする同次連立方程式と見る.

4. W の正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r\}$ をとる. $V\ni\boldsymbol{a}$ に対して，$\boldsymbol{w}=\sum_{i=1}^{r}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_i$，$\boldsymbol{w}'=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{w}$ とおけば $\boldsymbol{w}\in W$，$\boldsymbol{w}'\in W^\perp$. よって，$V$ は W と $W^\perp$ の直和になる. 次に，定義より $W\subset(W^\perp)^\perp$. 逆の包含関係は $\dim(W^\perp)^\perp=\dim V-\dim W^\perp=\dim V-(\dim V-\dim W)=\dim W$ による.

5. (1)　$W_1+W_2\supset W_1, W_2$ より $(W_1+W_2)^\perp\subset W_1{}^\perp\cap W_2{}^\perp$. $W_1{}^\perp\cap W_2{}^\perp\ni\boldsymbol{a}$ をとれば $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{w}_1)=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{w}_2)=0\ (\boldsymbol{w}_1\in W_1,\ \boldsymbol{w}_2\in W_2)$ であるから $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)=0$. よって $\boldsymbol{a}\in(W_1+W_2)^\perp$，すなわち $W_1{}^\perp\cap W_2{}^\perp\subset(W_1+W_2)^\perp$.

6. $W^\perp=\left\langle\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$，$\boldsymbol{c}=\dfrac{5}{9}\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}+\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\in W\oplus W^\perp$.

7. ${}^tA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}\Longleftrightarrow(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{x})=0\ (i=1,\cdots,n)\Longleftrightarrow\boldsymbol{x}\in W^\perp$.

8. $A+iB$ がユニタリ $\Longleftrightarrow(A+iB)^*(A+iB)=E\Longleftrightarrow{}^tAA+{}^tBB=E$，${}^tAB={}^tBA$

9. ユニタリ行列を $U=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ として，$U^*=U^{-1}$，$|\det U|=1$ より $\begin{pmatrix}\bar{\alpha}&\bar{\gamma}\\\bar{\beta}&\bar{\delta}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{e^{i\theta}}\begin{pmatrix}\delta&-\beta\\-\gamma&\alpha\end{pmatrix}$. よって，$\gamma=-e^{i\theta}\bar{\beta}$，$\delta=e^{i\theta}\bar{\alpha}$ を $|\alpha\delta-\beta\gamma|=1$ に代入する.

10. A がエルミート行列のとき，$(cA)^*=cA\Longleftrightarrow\bar{c}=c$.

11. $(E-A)(E+A)^{-1}=(E+A)^{-1}(E-A)$ に注意して

$$\begin{aligned}&((E-A)(E+A)^{-1})^*(E-A)(E+A)^{-1}\\&\quad=(E+A^*)^{-1}(E-A^*)(E-A)(E+A)^{-1}\end{aligned}$$

$$= (E-A)^{-1}(E+A)(E-A)(E+A)^{-1} = E.$$

13. $c_i = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i)$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{u}_i$ とおくと，$0 \leqq (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i) - \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i)} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i \bar{c}_j (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \|\boldsymbol{a}\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2.$

第 7 章

7.1

問1　固有値とそれに対応する固有ベクトルを順番に並べる．固有値に重複がある場合は，1次独立な固有ベクトルとする．

（1）　$-1, 6, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$　　（2）　$1+\sqrt{2}\,i, 1-\sqrt{2}\,i, \begin{pmatrix} -i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

（3）　$0, 2, 3, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$　　（4）　$-1, -1, 2, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

（5）　$-2, 1, 4, \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　　（6）　$i, i, -2i, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

（7）　$-1, 1, 2, 3, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

問3　例題 2.2 を固有多項式 $\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A|$ の計算に適用する．

問4　（1）　$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$　　（2）　$1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \cdots, 1/\lambda_n$

（3）　$\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \cdots, \bar{\lambda}_n$　　（4）　$2\lambda_1, 2\lambda_2, \cdots, 2\lambda_n$

（5）　$1-\lambda_1, 1-\lambda_2, \cdots, 1-\lambda_n$

問5　第 2 章練習問題 [**B**] 3 より．

問6　（1）　$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$，1次元　　（2）　$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$，2次元

（3）　$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$，2次元

7.2

問 7　（1）　たとえば $P=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 7 & 1\end{pmatrix}$ととれ，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$，$A^k$ は省略．

同様に

（2）　$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1/2-i/2 & -1/2-i/2\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2+i & 0\\ 0 & 2-i\end{pmatrix}$

（3）　$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -4\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$　（4）　対角化不可能

（5）　$P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

（6）　$P=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

（7）　$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -4\\ 6 & 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

問 8　$(P^{-1}NP)^l=P^{-1}N^lP$ より，N がべき零行列 $\Longleftrightarrow$ $P^{-1}NP$ がべき零行列，が成り立つから．

問 9　（1）　λ を A の固有値，$\boldsymbol{p}$ を λ に対応する固有ベクトルとする．このとき $A\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$，$A^2\boldsymbol{p}=\lambda^2\boldsymbol{p}$．したがって $\lambda^2=\lambda$ となり，λ は 0 または 1．

（2）　任意のベクトルを $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{x}$ と表すと，$\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{x}$ は零ベクトルでなければそれぞれ固有値 0 と 1 に対応する固有ベクトルになるから．

7.4

問 10　（1）　たとえば $T=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ととれ，${}^tTAT=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$．

同様に

（2）　$T=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$，${}^tTAT=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

（3）　$T=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$，${}^tTAT=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

（４）　$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$,

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

7.5

問 13　（１）　$\frac{5}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2$,　(1, 1)

（２）　$2y_1^2 + \sqrt{7}y_2^2 - \sqrt{7}y_3^2$,　(2, 1)

（３）　$y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2$,　(1, 2)

問 14　2 次形式を標準形に直して考える．

問 15　（１）　$(3-\sqrt{3})x'^2 + (3+\sqrt{3})y'^2 = 1$，楕円柱面

（２）　$x'^2 + 3y'^2 - 2z'^2 = 1$，一葉双曲面

7.6

問 19　（１）　たとえば $P = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ととれ，$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

同様に

（２）　$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,　$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

（３）　$P = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 18 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,　$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

（４）　$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,　$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問 20　(1)　たとえば $P=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ととれ，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

同様に

(2)　$P=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$

(3)　$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

練習問題 7

[A]

1.　固有値は $0, 0, 4, -4$，対応する固有ベクトルはそれぞれ

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

2.　(1)　たとえば $P=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ととれ，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

同様に

(2)　$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 11\\ 2 & 1 & 7\\ 3 & 1 & 9\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(3)　$P=\begin{pmatrix}11 & 0 & 1\\ 6 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

(4)　$P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 2 & 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

(5)　対角化不可能，固有値は $-1, -1, 2\pm\sqrt{5}$

3.　(1)　たとえば $T=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$ととれ，

$$ {}^tTAT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}. $$

同様に

（2）$U = \begin{pmatrix} 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & i/2 & i/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $U^*AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

（3）$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, ${}^tTAT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

（4）$U = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, $U^*AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. （1）$y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$，符号数 $(2, 1)$，最大値 2，最小値 -3

（2）$y_1^2+4y_2^2+6y_3^2$，$(3, 0)$，6，1

（3）$y_1^2+2y_2^2-4y_3^2$，$(2, 1)$，2，-4

5. $f_n = \dfrac{1}{2^n\sqrt{5}}\{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n\}$

6. （1）$\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha^n & 0 \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}$

7. $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ -n\cdot 3^{n-1} & (3-n)\cdot 3^{n-1} & n\cdot 3^{n-1} \\ -n\cdot 3^{n-1} & -n\cdot 3^{n-1} & (3+n)\cdot 3^{n-1} \end{pmatrix}$,

$B^n = \begin{pmatrix} (2+n)2^{n-1} & 2^{n+1}-2\cdot 3^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 3^n & 0 \\ -n\cdot 2^{n-1} & -2^{n+1}+2\cdot 3^n & (2-n)\cdot 2^{n-1} \end{pmatrix}$

[B]

1. A が正則ならば，AB と $A^{-1}(AB)A = BA$ の固有値は一致する．A が正則でないときは，行列 $\varepsilon E+A$ は $\varepsilon \neq 0$ で ε が十分小のとき正則．固有値の連続性より ε を 0 に近づければよい．

2. $|E-A| = \phi_A(1) = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_n)$ より.

4. (1) $\overline{|\lambda E-A|} = \overline{|{}^t(\lambda E-A)|} = |\bar{\lambda}E-A^*|$ より.

(2) $((\lambda E-A)\boldsymbol{x}, (\lambda E-A)\boldsymbol{x}) = ((\bar{\lambda}E-A^*)(\lambda E-A)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$

$= ((\lambda E-A)(\bar{\lambda}E-A^*)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = ((\bar{\lambda}E-A^*)\boldsymbol{x}, (\bar{\lambda}E-A^*)\boldsymbol{x})$ より.

5. 適当なユニタリ行列 U をとり, $B = U^*AU$ が対角行列になるとする. このとき, $B^* = U^*A^*U$ も対角行列. したがって $BB^* = B^*B$ となり, これより, $AA^* = A^*A$ を得る. 逆は A をユニタリ行列で3角化して考える.

6. (1) $\phi_A(A) = O$ より, $\deg \phi_A \geqq \deg \psi_A$. したがって

$$\phi_A(\lambda) = q(\lambda)\psi_A(\lambda) + r(\lambda), \quad \deg \psi_A > \deg r$$

と表せる. $\phi_A(A) = \psi_A(A) = O$ より, $r(A) = 0$ となるが, $\psi_A(\lambda)$ の次数の最小性より $r(\lambda) = 0$.

(2) $\boldsymbol{p}$ を固有値 λ_i に対する固有ベクトルとすれば

$$\boldsymbol{o} = \psi_A(A)\boldsymbol{p} = \psi_A(\lambda_i)\boldsymbol{p}$$

となり, $\psi_A(\lambda_i) = 0$.

7. A をジョルダン標準形に直して考える.

8. (1) $(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$　(2) $(\lambda-2)(\lambda-3)$

(3) $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$　(4) $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-5)$

9. (1) $\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$　(3) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-1}+e^3 & -e^{-1}+e^3 \\ -e^{-1}+e^3 & e^{-1}+e^3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} e^2 & e^2 & e^2/2 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} -e^{-1}+2e & 0 & 2e^{-1}-2e \\ e^{-1}-e^2 & e^2 & -2e^{-1}+2e^2 \\ -e^{-1}+e & 0 & 2e^{-1}-e \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 2e^2 & 2e^2-2e^3 & e^2 \\ 0 & e^3 & 0 \\ -e^2 & -2e^2+2e^3 & 0 \end{pmatrix}$

10. $AB = BA$ を満たせば, 次が成り立つから.

$$(A+B)^k = \sum_{r=0}^{k} {}_kC_r\, A^{k-r}B^r = A^k + kA^{k-1}B + \cdots + {}_kC_r\, A^{k-r}B^r + \cdots + B^k$$

さ く 引

裕野敏博（はだの としひろ）　名城大学理工学部

加藤芳文（かとう よしふみ）　名城大学理工学部

理工系の基礎線形代数学

1994年4月　第1版　第1刷　発行
2011年3月　第1版　第20刷　発行

著　者　裕野敏博
　　　　加藤芳文
発行者　発田寿々子
発行所　株式会社 学術図書出版社
〒113-0033 東京都文京区本郷5-4-6
電話 03-3811-0889　振替 00110-4-28454
印刷　三美印刷（株）

定価はカバーに表示してあります．

ISBN978-4-87361-170-9